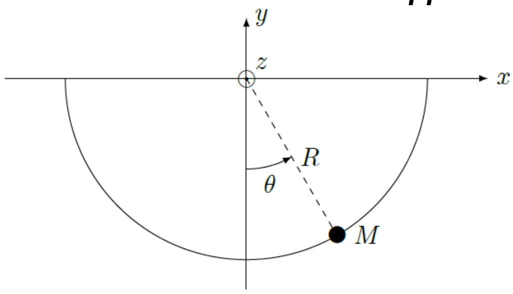
Exercice 1 : Anneau sur un support circulaire.

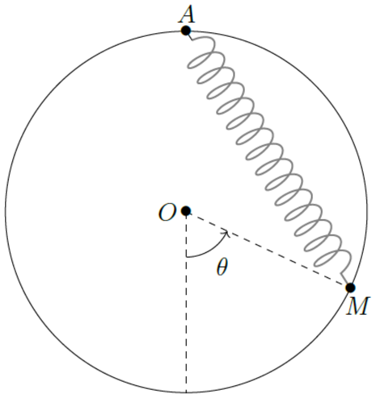


On étudie le mouvement d'un point M astreint à se déplacer sur un support circulaire de centre O et de rayon R. On repère la position de M avec l'angle θ

On prend en compte les frottements fluides modélisés par la force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O puis par rapport à (Oz).
2. Exprimer le moment des forces s'exerçant sur M par rapport à l'axe (Oz)
3. Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

Exercice 2 : Action d'un ressort sur un point matériel.

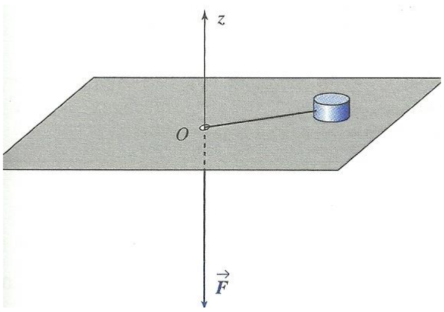


Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m, est assujettie à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R. La masselotte est reliée au point A par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_O.

1. Faire le bilan des actions mécaniques.
2. Etablir l'équation du mouvement de M à l'aide du théorème du moment cinétique.

Exercice 3 : Force centrale non conservative.

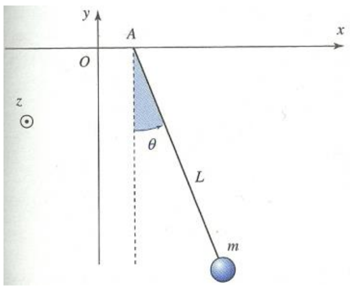
On considère un palet de masse m glissant sans frottement sur une table (plane et horizontale). Le palet est attaché à une ficelle que l'on glisse dans un trou au centre de la surface. Le palet étant lancé avec une vitesse initiale de norme v_O, il décrit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon r_O si l'opérateur applique à l'autre extrémité du fil une tension de norme T_O.



1. Faire un schéma du système.
2. Déterminer la relation entre T_O, v_O, r_O, et m.
3. Déterminer le travail à apporter pour diminuer le rayon de moitié.
4. Est-il possible de ramener le palet au centre de la table ?

Exercice 4 : Pendule attaché à un point mobile.

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L attaché au point A qui est animé d'un mouvement sinusoïdal le long de l'axe Ox : $x_A(t) = x_O \cos(\omega t)$

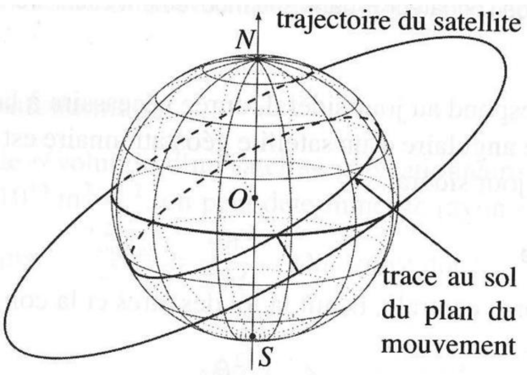


1. Peut-on a priori appliquer le théorème du moment cinétique en A ? Pourquoi aurait-on intérêt à le faire ?
2. Reprendre la démonstration du théorème du moment cinétique pour le cas où on l'applique au point mobile A.
3. Etablir l'équation du mouvement de ce pendule simple.

Sans autre justification que l'impossibilité physique qu'un mouvement se fasse dans l'atmosphère sans frottement, on ajoute un terme d'amortissement à cette équation sous la forme $\alpha\dot{\theta}$.

4. Déterminer la solution en cas d'oscillations de faible amplitude.

Exercice 5 : Satellite géostationnaire



1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle pour un corps de masse m en orbite autour d'un astre de masse M.
2. En déduire l'expression de $E_{P,eff}$, l'énergie potentielle effective en faisant apparaître la constante des aires C.
3. Tracer l'allure du graphique $E_{P,eff} = f(r)$. Caractériser à l'aide du graphique le cas particulier du mouvement circulaire.
4. En déduire l'expression de la vitesse du mouvement circulaire en fonction de la masse M de l'astre attracteur et du rayon r_O de la trajectoire.

On appelle satellite géostationnaire un satellite survolant à chaque instant le même point de la Terre.

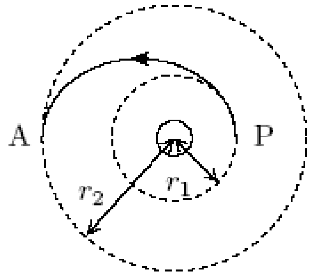
5. En raisonnant par l'absurde, montrer que le mouvement du satellite géostationnaire se fait nécessairement dans le plan de l'équateur.
6. Que vaut la période d'un tel satellite ? En déduire l'altitude d'un satellite géostationnaire.

Exercice 6 : Satellisation.

On souhaite réaliser le lancement d'un satellite de masse m = 100 kg à partir d'une base située à la latitude λ pour le placer sur une orbite circulaire de rayon r_1 = 6700 km.
On note R_T le rayon de la terre, ω_T la vitesse de rotation de la terre sur son axe et g la norme du vecteur accélération de la pesanteur à la surface de la planète.

1. Exprimer l'énergie mécanique du satellite sur son orbite circulaire dans le repère géocentrique en fonction de m, g, R_T et r_1.
2. Exprimer l'énergie mécanique du satellite à la surface de la planète dans le repère géocentrique en fonction de m, g, R_T, λ et ω_T.
3. Déterminer le travail à fournir au satellite pour le placer en orbite. Commenter sa dépendance vis-à-vis de r_1 puis de λ.

L'objectif final est de placer le satellite sur une orbite circulaire géostationnaire de rayon r_2. Le passage par une orbite basse permet une plus grande souplesse sur le choix de l'horaire de lancement déjà extrêmement contraint par les conditions de réalisation et de mise en œuvre de la fusée lanceur.
Le satellite d'abord placé sur l'orbite circulaire basse de rayon r_1 = 6700km, effectue alors un transfert de l'orbite basse vers l'orbite haute géostationnaire de rayon r_2=42400km en passant par une demi ellipse selon la configuration donnée sur la figure suivante.



4. Exprimer les énergies cinétiques E_{C1} et E_{C2} du satellite sur les orbites circulaires basse et géostationnaire.
5. Exprimer les énergies cinétiques E_{CP} et E_{CA} du satellite au périgée et à l'apogée de la trajectoire elliptique.
6. En déduire le travail des moteurs au périgée et à l'apogée pour réaliser ce type de transfert.
7. Déterminer la période de révolution du satellite sur l'orbite basse et la durée du transfert. Faire les A.N.

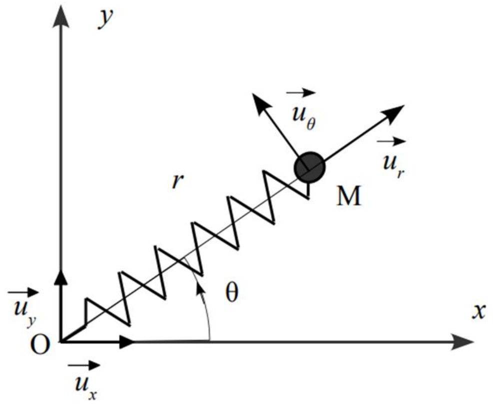
Exercice 7 : Détermination de la masse de Jupiter

Les périodes et rayons des trajectoires (circulaires) des satellites galiléens de Jupiter figurent dans le tableau ci-dessous.

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
Rayon (km)	421 800	671 100	1 070 400	1 882 700
période	42 h 29 min	85 h 14 min	171 h 43 min	400 h 32 min

1. En déduire la masse de Jupiter.

Exercice 8 : Force de rappel élastique.



Dans un référentiel R galiléen, on étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à une force centrale, de centre O, conservative dérivant de l'énergie potentielle : $E_P = \frac{1}{2}k(r - l_O)^2$.

En coordonnées cartésiennes, les conditions initiales sont les suivantes : x(0) = a (>l_O) ; y(0) = z(0) = 0 ; $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_O\,(>0)$.

1. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
2. Montrer que le moment cinétique de M en O se conserve et déterminer son expression à partir des conditions initiales.
3. Montrer alors la planéité du mouvement et préciser le plan dans lequel sera située la trajectoire. Montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante et déterminer son expression à partir des conditions initiales.
4. Montrer que l'énergie mécanique se conserve et déterminer son expression à l'aide des conditions initiales.
5. Définir et exprimer une énergie potentielle effective relative au mouvement radial de M. Montrer que la trajectoire s'effectue entre deux cercles.
6. Exploiter alors la seconde loi de Newton pour exprimer le système d'équations vérifié par (x(t), y(t)).

On se restreint au cas où l_O = 0.

7. Déterminer x(t) et y(t) et en déduire la nature de la trajectoire.

Exercice 9 : Vitesse de libération.

On considère un astre de masse M et de rayon R et un point matériel de masse m situé à sa surface animé d'une vitesse v.

1. Exprimer l'énergie mécanique de ce point matériel.
2. Rappeler l'énergie mécanique minimale pour qu'il soit dans un état de diffusion. En déduire l'expression de la seconde vitesse cosmique, ou vitesse de libération. Effectuer l'A.N. pour la Terre.

En appliquant un modèle de mécanique classique, on peut voir un trou noir comme étant un astre dont les caractéristiques (rayon et masse) implique une vitesse de libération supérieure à c la vitesse de la lumière.

3. Exprimer le rayon de Schwarzschild R_S, valeur maximale pour qu'un objet de masse M soit un trou noir dans ce modèle. Effectuer l'application numérique pour $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg (soit la masse du soleil) . Comparer la valeur trouvée au rayon du soleil ($R_{Sol} = 7{,}0.10^5$ km).
4. Comparer les rapports des rayons d'atome et de son noyau. Que peut-on en conclure sur la densité de la matière dans un trou noir ?

Exercice 10 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

Un atome d'hydrogène est constitué d'un électron de charge –e et de masse $m=9{,}0.10^{-31}$kg et d'un proton de charge $e=1{,}610^{-19}$C et de masse $m_P=1{,}67.10^{-27}$kg.

Dans le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, on étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel lié au proton supposé galiléen.

1. Exprimer la force Colombienne et la force de gravité exercée sur l'électron. Montrer que cette dernière est négligeable dans cette étude.

$G=6{,}67.10^{-11}\,m^3kg^{-1}s^{-2}$; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_O} = 9.10^9\, m.F^{-1}$

2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}(P)$ de l'électron dans le référentiel du proton est constant.
3. Montrer que l'énergie mécanique est constante.

On fait l'hypothèse que l'électron suit une trajectoire circulaire.

Quand une grandeur est conservée en mécanique classique, alors on montre qu'elle est quantifiée en mécanique quantique. Bohr supposa donc que la norme du moment cinétique de l'électron était quantifiée selon les valeurs suivantes : $\left\|\vec{L}_n\right\| = n\hbar$ où $\hbar = 1{,}05.10^{-34}\, J.s$ est la constante (réduite) de Planck.

4. Exprimer le lien entre $\left\|\vec{L}_n\right\|$, r_n et v_n. Trouver une autre relation liant r_n et v_n.
5. Déterminer alors les expressions littérales de la vitesse v_n et du rayon r_n. Faire l'application numérique pour r_1 et commenter.
6. Exprimer alors l'énergie mécanique E_n. Faire l'application numérique pour n=1 en eV et commenter.

Exercice 11 : satellite et frottements.

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée de vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Un satellite situé sur une orbite à 1000 km d'altitude descend par exemple d'environ 2 m par jour. On cherche à modéliser ces observations.

On considère d'abord le cas d'un satellite soumis à la seule force de gravité exercée par la Terre et en orbite circulaire de rayon R.

1. Exprimer la force exercée sur le satellite par la Terre en fonction de m, M_T, G et R, puis en fonction de m, g, R_T et R (g étant l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, et R_T le rayon de la planète.
2. Etablir la relation donnant la vitesse sur la trajectoire v en fonction de R, g et R_T.
3. Rappeler l'expression de l'énergie mécanique associée à un mouvement circulaire de rayon R autour de la Terre, l'écrire en fonction de m, g, R_T et R.

On modélise alors l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement proportionnelle à la masse du satellite et au carré de sa vitesse : $\vec{f} = -\alpha m v.\vec{v}$ où α est un coefficient de frottement. Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les expressions des différentes énergies en fonction de R établies pour le mouvement circulaire restent valables, mais R varie lentement dans le temps.

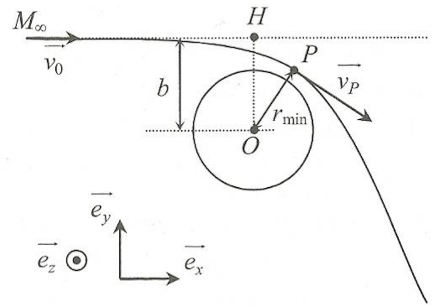
4. À l'aide du théorème de la puissance cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par R.
5. Etablir alors la loi horaire vérifiée par le rayon R(t) en appelant R_O le rayon initial. Déterminer alors la valeur numérique de α.
6. Exprimer la vitesse du satellite en fonction du temps. En quoi ce résultat est-il surprenant de prime abord ?

Exercice 12 : Premier vol habité (par un homme)

Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute, le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse m = 4725 kg. Les altitudes au périgée P et à l'apogée A étaient z_P=180km et z_A=327 km.

1. Quelle est la nature de la trajectoire du satellite ? En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur cette trajectoire.
2. Exprimer la vitesse v du satellite en fonction de son altitude z, de z_P , z_A, M_T , R_T (masse et rayon de la Terre) et de G, la constante de gravitation.
3. Calculer v en P et en A.

Exercice 13 : Etat de diffusion.



On considère un astéroïde de masse m dans le référentiel géocentrique. Loin de la planète, on considère qu'il présente une vitesse $\vec{v}_O$ et un paramètre d'impact b (voir figure). La trajectoire suivie par l'objet est une branche d'hyperbole, l'objet passe alors au plus près de la planète en P le périgée de sa trajectoire.

1. Rappeler quelles grandeurs sont conservées au cours du mouvement de l'astéroïde. En déduire deux relations liant les vitesses de l'astéroïde en M_∞ et en P ainsi que les distances r_{min} et b.
2. En déduire la distance minimale d'approche r_{min}.
3. Effectuer l'application numérique pour v_O = 2,0 km.s^{-1} et b = 1,4.10^5 km.