

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de calculatrices est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

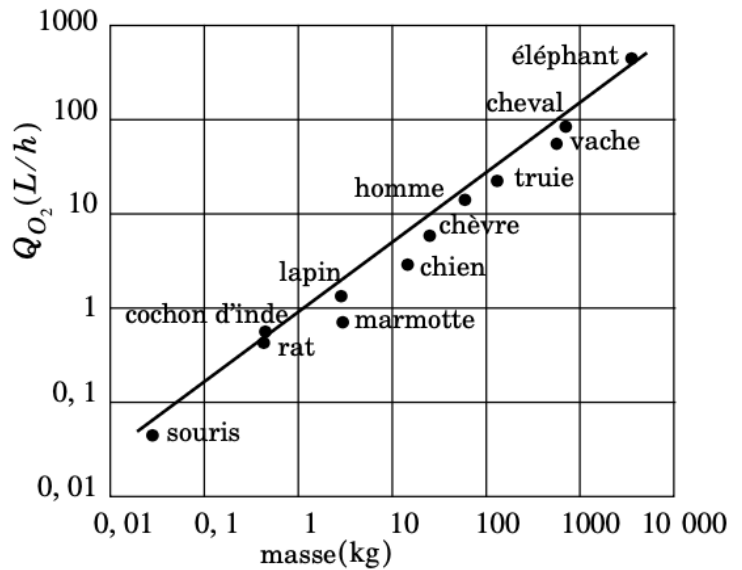
Ce problème est extrait de plusieurs sujets de concours.

Les parties A, B, C et D sont à rendre sur une première copie.
Les parties E, F, G et H sont à rendre sur une deuxième copie.

La rédaction et la numérotation des questions sont volontairement inchangées.
Des indications et des questions en italique ont été modifiées/ajoutées.
Les sous-parties diffèrent en longueur et sont largement indépendantes.

Partie A : De la souris à l'éléphant... ou du coq à l'âne

On dira qu'une fonction $y(x)$ vérifie une loi d'échelle d'exposant α si y est proportionnel à x^α . De nombreux paramètres physiologiques concernant les espèces animales d'un même groupe zoologique obéissent à de telles lois. Ainsi, les mammifères terrestres ayant une température corporelle proche de 37°C vérifient assez bien la relation : $Q_{O_2} = 0,68M_c^{3/4}$ où M_c désigne la masse corporelle en kilogramme et Q_{O_2} la consommation en dioxygène



en litre par heure au repos, dans des conditions expérimentales précises que nous ne détaillerons pas. Nous verrons que cette loi, découverte dès 1932 par M. Kleiber, peut être mise en rapport avec la puissance thermique dégagée par le métabolisme de l'animal.

II. B. 0) Justifier d'abord que $Q_{O_2} = n f_c V$ avec la fréquence cardiaque f_c d'un animal en battements par minute et le volume V de dioxygène transporté par le sang à chaque battement de coeur en précisant la valeur de n .

II.B.1) Les morphologies des animaux d'un même groupe étant voisines, le volume de dioxygène transporté par le sang à chaque battement de coeur est à peu près proportionnel à la masse corporelle M_c . Sachant que pour un homme

de 70 kg, la fréquence cardiaque est d'environ 70 battements par minute, déterminer la loi d'échelle exprimant la fréquence cardiaque f_c d'un animal en battements par minute en fonction de sa masse corporelle M_c en kilogramme.

Pour la suite, on admet si besoin que la constante de proportionnalité est $70^{5/4}$.

II.B.2) Étudier la validité de la loi précédente pour la souris, le lapin et l'éléphant à l'aide du tableau ci-dessous :

	souris	lapin	renard	éléphant
M_c (kg)	0,015	2,0	3,0	3000
f_c (batt/min)	620	210		37
τ_{vie} (années)	3,5		14	80

Commenter le signe de la différence entre les ordres de grandeur calculés avec la loi d'échelle et les données du tableau.

II.B.3) Le tableau précédent donne également la durée de vie moyenne τ_{vie} de quelques mammifères terrestres.

a) Écrire la loi d'échelle entre τ_{vie} et M_c et la traduire en une relation de proportionnalité permettant de trouver l'exposant. Quelle courbe tracer pour garantir l'exposant de la loi d'échelle $\tau_{vie}(M_c)$ dans la pente d'une régression linéaire ? À l'aide du tableau,

déterminer l'exposant de la loi d'échelle $\tau_{vie}(M_c)$.

b) Proposer une interprétation de cette loi.

c) Le cas de l'homme vérifie-t-il cette loi ? Commenter.

II.B.6) On se propose de donner quelques indications sur l'origine physique de la loi d'échelle $Q_{O_2} \propto M_c^{3/4}$, le symbole \propto désignant une relation de proportionnalité. De nombreux modèles ont été développés afin d'interpréter cette loi, les plus récents utilisant des géométries fractales. Ici, nous allons plutôt examiner de façon très générale les conséquences des lois physiques de l'écoulement du sang. Nous décrirons le système vasculaire de l'animal par un ensemble de N vaisseaux de rayon R et de longueur L . Le débit sanguin total Q_s (et par suite la consommation en dioxygène Q_{O_2}) vérifie la loi d'échelle :

$$Q_s \propto N \frac{R^4}{L} \propto Q_{O_2}$$

Lorsqu'on passe d'un animal à un autre en multipliant la taille par un coefficient λ , nous supposons que les paramètres L , R , N sont respectivement multipliés par λ^a , λ^b , λ^n , les exposants a , b , n étant indéterminés à ce stade. Ainsi, $Q_s(\lambda) = Q_s(1)\lambda^{n+4b-a}$ et $M_c(\lambda) = M_c(1)\lambda^3$.

a) Sachant qu'en pratique la vitesse des écoulements sanguins est à peu près indépendante de la taille des animaux, exprimer d'une manière différente comment varie Q_s avec λ lors d'un changement d'échelle.

En déduire que $a = 2b$.

b) En supposant que la masse corporelle est proportionnelle au volume total des vaisseaux sanguins, trouver une relation entre n et a .

c) En déduire en fonction de a l'exposant γ de la loi d'échelle $Q_s \propto M_c^\gamma$.

d) Quelle est la valeur de γ ?

e) Calculer les exposants a , b , n . Commenter.

Partie B : Le bleu de la perruche ou le blush de la paire

On rappelle que les relations de conjugaison de Descartes et de Newton pour les lentilles sphériques minces dans l'approximation de Gauss sont :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \qquad \overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2$$

avec A et A' les points objet et image conjugués par la lentille sphérique mince de centre optique O , de foyers objet et image F et F' et de distance focale image f' .

À l'origine, la couleur des perruches à l'état sauvage est verte, mais la captivité chez cet oiseau, souvent élevé en nombre, a permis l'émergence de nouvelles couleurs, comme le bleu (**photo 2**). C'est notamment l'appauvrissement en pigments jaunes dans son plumage qui est indirectement responsable de cette coloration si particulière et rare dans le domaine animal.

De façon schématisée, une plume est constituée essentiellement d'un rachis sur lequel pousse les barbes sur lesquelles naissent des barbules (**figure 1**). Le long des barbules prennent naissance à leur tour des crochets.



Photo 2 - Perruche bleue

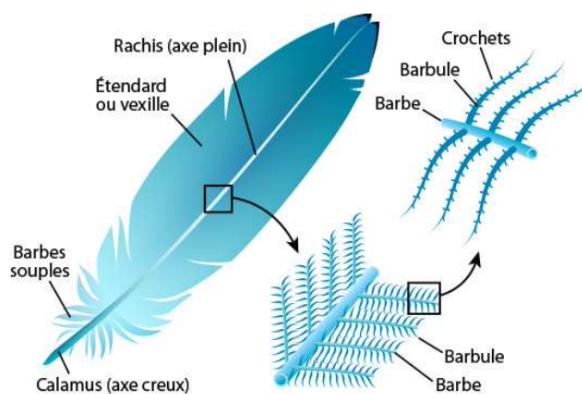


Figure 1 - Constitution d'une plume

Afin de déterminer l'origine physique de cette couleur bleue, on observe une partie AB d'une plume de perruche à l'aide d'un microscope optique.

Pour cela, on dispose :

- d'une première lentille, L_1 (centre O_1 , distance focale $f'_1 = 1,2$ cm), qui porte le nom d'objectif ;
- d'une deuxième lentille, L_2 (centre O_2 , distance focale $f'_2 = 2,0$ cm), qui porte le nom d'oculaire.

La distance qui sépare le foyer image F'_1 de l'objectif et le foyer objet F_2 de l'oculaire est appelée intervalle optique, noté Δ , avec ici $\Delta = 16$ cm (**figure 2**).

L'observation se fait à l'aide d'un œil emmétrope (œil à vision normale) situé derrière l'oculaire.

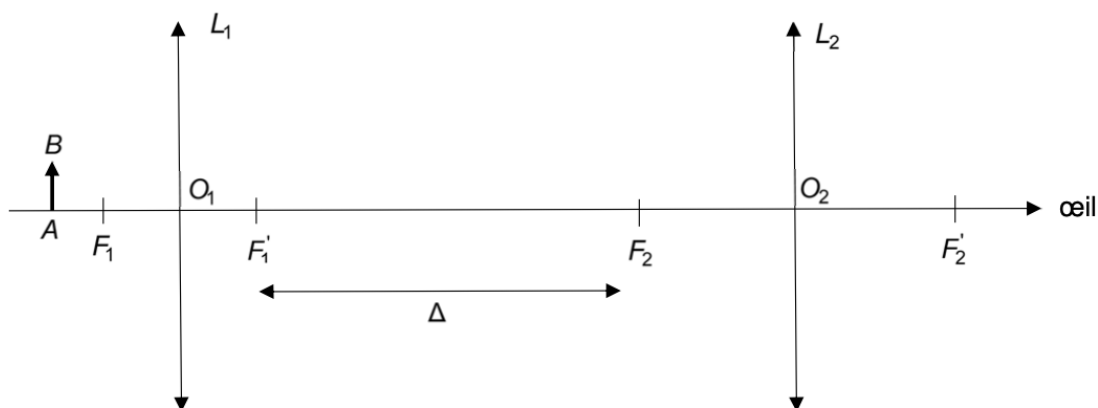


Figure 2 - Schéma du microscope

On se placera pour toute la suite dans les conditions de Gauss et dans l'approximation des petits angles. On note h la taille de l'objet AB observé.

- Q1.** Afin que l'observation puisse s'effectuer sans fatigue visuelle pour l'œil emmétrope, où doit être située l'image finale A_2 en sortie de L_2 ? Dans quel plan se situe donc l'image intermédiaire A_1B_1 ?
- Q2.** Reproduire sur la copie le schéma du microscope et tracer le chemin de deux rayons lumineux passant par l'extrémité B de l'objet, l'un parallèle à l'axe et l'autre passant par O_1 . Faire apparaître sur ce schéma :
- l'image intermédiaire A_1B_1 ;
 - le diamètre angulaire α' de l'image finale vue par l'œil.

- Q3.** Montrer que la grandeur $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{AB}$, appelée grandissement transversal de l'objectif, s'écrit :

$$\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'}$$

- Q4.** En déduire l'expression du diamètre angulaire α' de l'image vue par l'observateur au travers du microscope en fonction de f_1' , f_2' , h et de Δ .

En l'absence de dispositif, l'œil voit net un objet situé à une distance comprise entre d_m et d_M , avec $d_m < d_M$.

- Q5.** Quels noms donne-t-on aux points objets correspondant à ces distances ? Donner une valeur à d_m et d_M pour un œil emmétrope.
- Q6.** Déterminer le diamètre angulaire α de l'objet AB vu sans instrument et situé à une distance d_m de l'œil (**figure 3**).

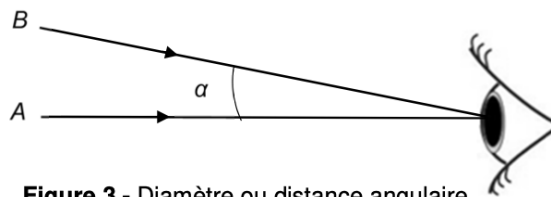


Figure 3 - Diamètre ou distance angulaire

- Q7.** En déduire que la grandeur $G_C = \frac{\alpha'}{\alpha}$, appelée grossissement commercial du microscope, s'écrit :

$$G_C = \frac{d_m \Delta}{f_1' f_2'}$$

Faire l'application numérique.

- Q8.** Un œil peut distinguer deux images ou deux objets si la distance angulaire les séparant est supérieure à la limite de résolution angulaire de l'œil $\varepsilon = 1'$ (une minute d'arc). Déterminer quelle sera la distance angulaire minimale α_m entre deux objets vus au travers de ce microscope.

L'image d'une partie d'une plume de perruche est donnée ci-après (**photo 3**) :

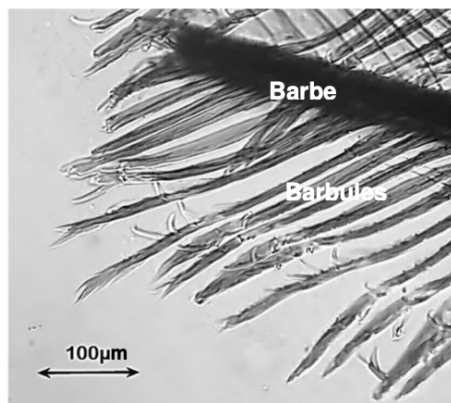


Photo 3 - Image d'une plume de perruche à l'aide d'un dispositif non précisé

- Q9.** Par mesure sur la **photo 3**, donner une estimation de la distance entre deux crochets situés au bout des barbules.
- Q10.** On rappelle que la résolution angulaire de l'œil nu est $\varepsilon = 1'$. Ces crochets peuvent-ils être distingués directement sans instruments ? Pourront-ils être distingués avec le microscope utilisé précédemment ?

En explorant davantage la plume, on découvre qu'à l'intérieur des barbes apparaissent des couches fines parallèles et emplies de petits grains appelés microgranules (**figure 4**).

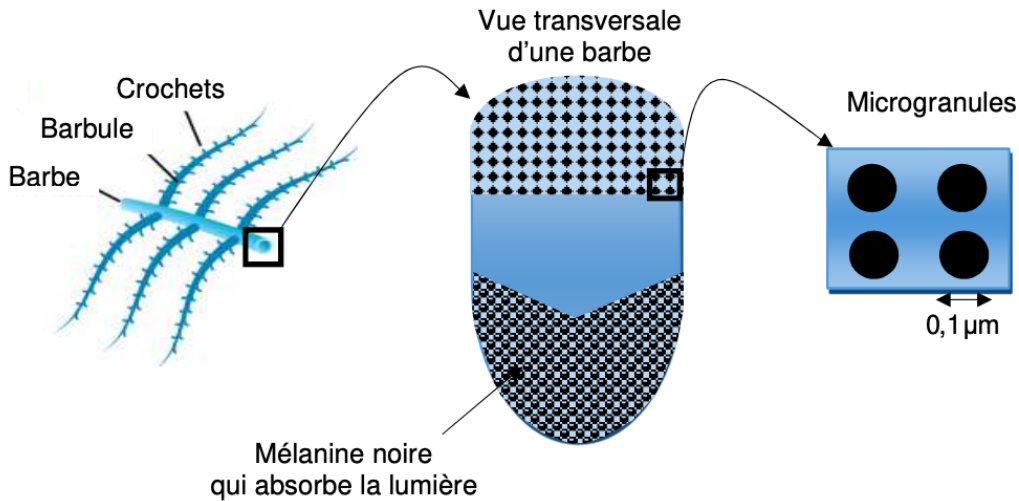


Figure 4 - Coupe transversale d'une barbe

Ces microgranules de petite taille sont responsables d'une diffusion de la lumière incidente (**figure 5**) :

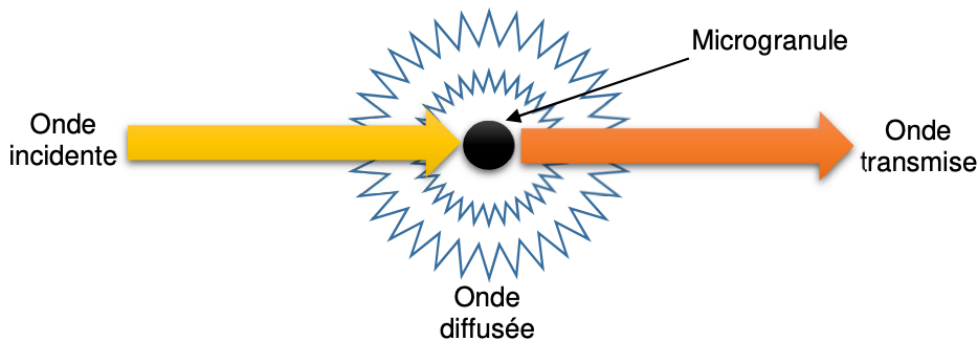


Figure 5 - Diffusion de la lumière par une microgranule

La puissance moyenne diffusée à travers une sphère, de centre une microgranule, est donnée par la formule :

$$\langle P \rangle = \alpha \omega^4$$

avec α une constante de proportionnalité et ω la pulsation du rayonnement incident.

- Q11.** Expliquer alors la couleur bleue prise par le plumage de la perruche lorsqu'elle est éclairée en lumière blanche. Que deviennent les radiations non diffusées ?

Préciser un ordre de grandeur de la pulsation de la lumière bleue ω_b .

- Q12.** Par analogie avec un autre domaine de la physique, justifier que le premier étage de la barbe se comporte comme un filtre passe-bas en transmission.

Conclure sur la couleur bleue de la perruche.

De quel autre phénomène la diffusion Rayleigh est-elle aussi responsable ?

Partie C : Du vert clair au violet pour le canard colvert ou le colvert et son col vert

Dans certains cas, la couleur d'un plumage varie selon l'angle d'observation. C'est le cas du canard colvert mâle qui possède autour de son cou et de sa tête un plumage dont la teinte varie selon la direction (**photo 4**).

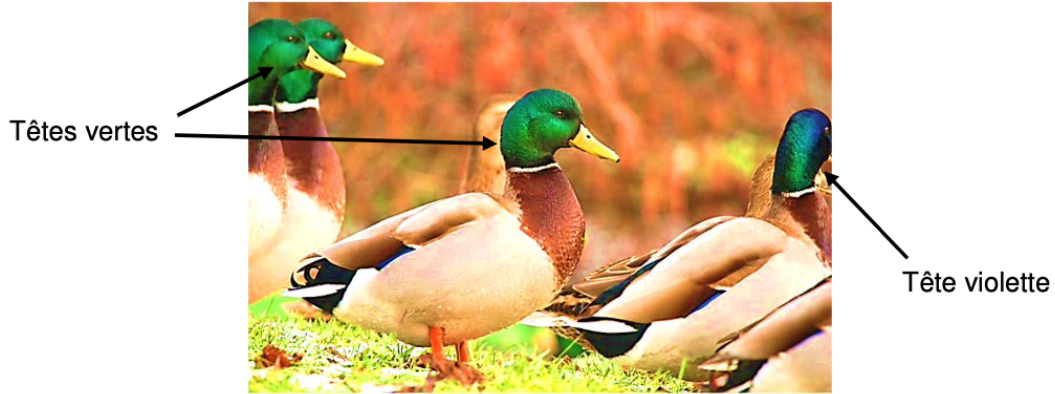


Photo 4 - Teinte variable sur les cous des canards colvert

Pour expliquer ce phénomène, il faut étudier l'intérieur des barbules, constituées notamment de petites cavités dans lesquelles on trouve de minces lamelles parallèles appelées microlamelles (**photo 5**).

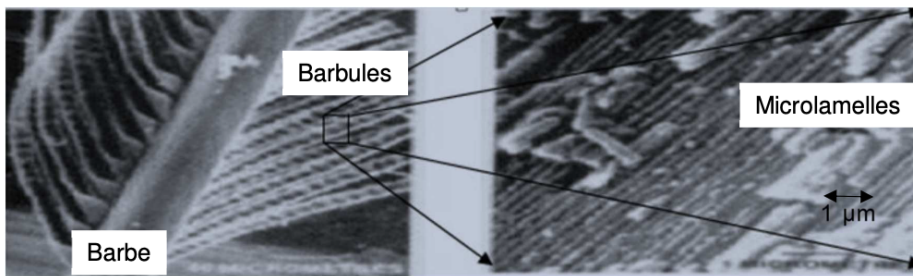


Photo 5 - Observation des microlamelles au microscope électronique

Chaque microlamelle se comporte comme un petit miroir réfléchissant la lumière. Entre deux lamelles se situe de la mélanine absorbant la lumière. Ainsi ces microlamelles s'apparentent aux traits d'un réseau plan qui peut être modélisé soit par la **figure 6a**, soit par la **figure 6b** :

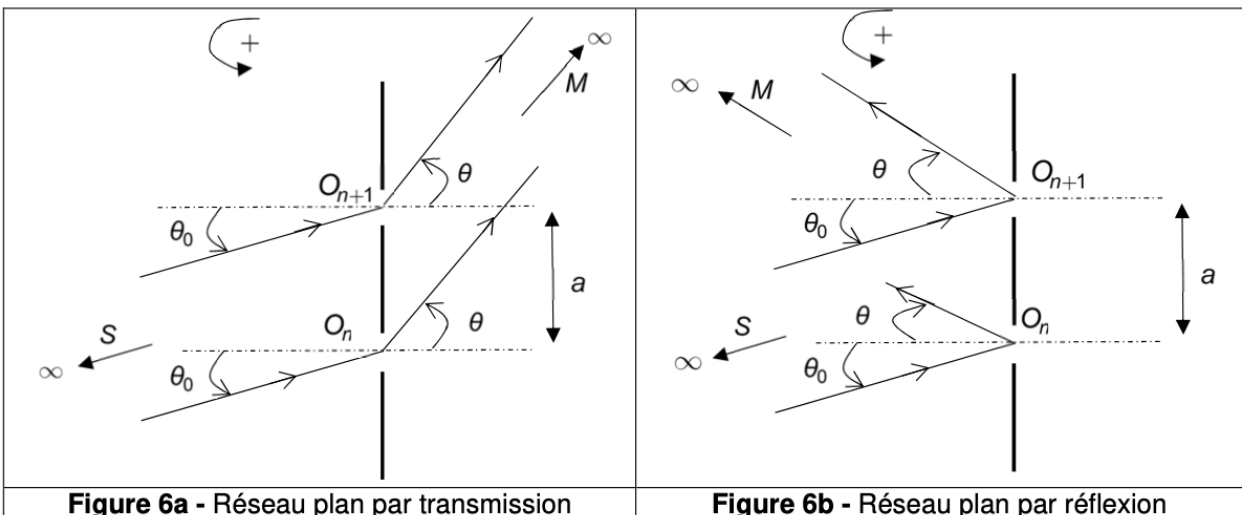


Figure 6a - Réseau plan par transmission

Figure 6b - Réseau plan par réflexion

La distance entre deux lamelles est notée a . On donne $a = 0,56 \mu\text{m}$.

S représente une source de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , située à l'infini, envoyant un faisceau de rayons cohérents entre eux. L'observation se fait en un point M situé à l'infini.

On prend $n = 1$ pour l'indice optique de l'air.

Les fronts d'onde pour une onde plane sont des plans perpendiculaires aux rayons lumineux qui sont alors tous parallèles entre eux. Le théorème de Malus affirme alors que le chemin optique est le même depuis un point à l'infini vers tout point d'un même front d'onde.

On admet que le phénomène de "diffraction par un réseau" correspond aux interférences entre deux à deux des rayons incidents au réseau.

Q13. La structure en microlamelles constitue-t-elle un réseau par réflexion ou par transmission ?

Q14. Dans le cas du réseau plan par transmission, la différence de marche $\delta(M) = (SO_{n+1}M) - (SO_nM)$ entre deux rayons, l'un passant par O_n , l'autre par O_{n+1}

est, d'après le théorème de Malus, $HO_{n+1} - O_nK$ avec H le projeté orthogonal de O_n sur le rayon incident en O_{n+1} et K le projeté orthogonal de O_{n+1} sur le rayon diffracté issu de O_n . À partir d'un schéma, déterminer l'expression de $\delta(M)$ en fonction de a , θ_0 et θ .

Q15. Pour quelles valeurs de $\delta(M)$ les ondes interfèrent entre-elles de façon totalement constructive ?

Q16. Dans le cas des réseaux par réflexion, montrer par analogie que les maximums d'intensité lumineuse sont donnés pour des angles θ_k tels que :

$$\sin \theta_k + \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

avec k un entier relatif.

Q17. Application : de quelle couleur apparaît la tête d'un canard colvert, dont les microlamelles sont éclairées en incidence normale par des rayons provenant du Soleil, d'une part pour l'observateur A et d'autre part pour l'observateur B supposés suffisamment éloignés (**figure 7**) ? On justifiera que l'on ne tient compte que des ordres $k = \pm 1$. Commenter en lien avec la **photo 4**.

On précise que les canards de la **photo 4** font face au soleil.

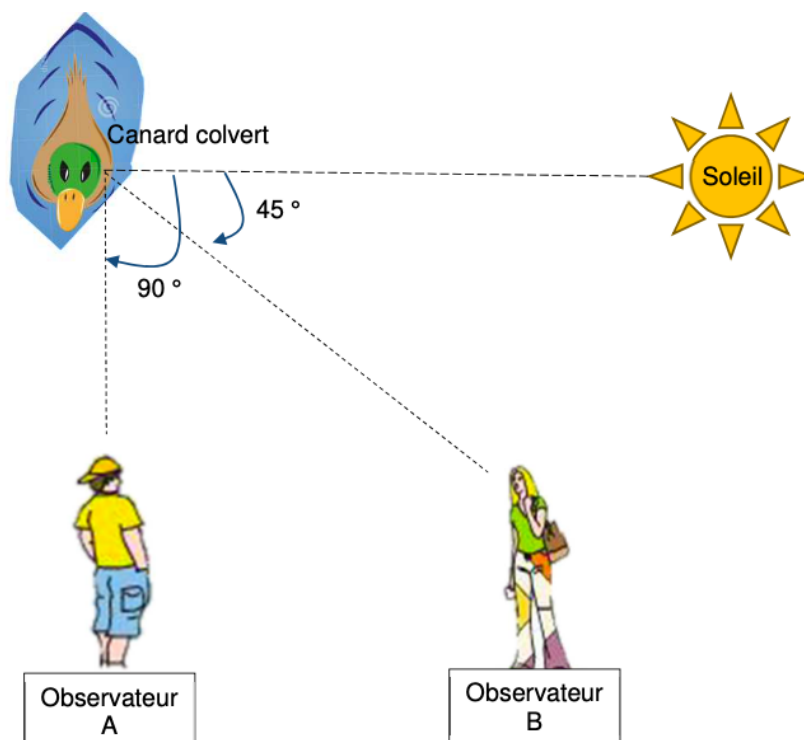


Figure 7 - Canard colvert éclairé par le soleil

Partie D : Branche en vibration ou un oiseau sur une branche

1. Oscillation libre d'une branche horizontale

Le bois est un matériau à la fois résistant et souple : on peut le déformer sans le casser, il est élastique.

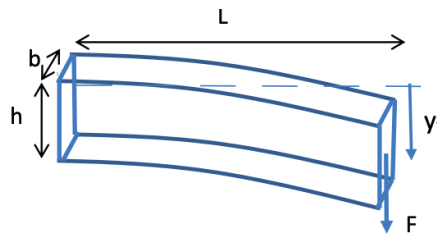
On modélise une branche rectiligne horizontale, que l'on suppose encastree dans le tronc d'un arbre, comme une poutre de section rectangulaire de largeur b , de hauteur h et de longueur L . La section de la poutre a une aire $S = b h$.

E est le module de Young du bois défini dans la loi longitudinale de Hooke. On prendra pour le bois de chêne $E = 10 \text{ GPa}$ dans le sens du fil du bois, et une masse volumique $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$.

Au repos la fibre est horizontale, on ne tient pas compte de son poids. Quand on applique une force verticale transverse F_y à son extrémité libre, celle-ci est déformée et son extrémité se déplace verticalement dans la direction verticale de y_f déplacement que l'on appelle la flèche.

On admettra que : $\vec{F} = -K y_f \vec{u}_y$ où E est le module de Young défini pour les contraintes longitudinales et la constante s'exprime : $K = \frac{E b h^3}{4 L^3}$. On reste dans le cadre des faibles déformations.

Le centre de gravité de la branche est pris en son milieu.



3.1.1. Par analyse dimensionnelle, vérifier l'homogénéité de la constante K .

3.1.2. La constante de raideur du ressort équivalent à la branche (du point de vue de son déplacement vertical à l'extrémité de la branche) est K . Calculer sa valeur pour $L = 2 \text{ m}$, $b = h = 3 \text{ cm}$.

3.1.3. Quelle est l'énergie potentielle élastique associée ?

3.1.4. Rappeler l'expression de l'énergie cinétique d'un objet ponctuelle de masse M et de vitesse v . Justifier que la vitesse du centre de gravité de la branche est environ égale à $\frac{1}{2} \frac{dy_f}{dt}$.

En considérant que l'énergie cinétique de la branche est égale à celle du centre de gravité affectée de toute la masse, justifier que l'énergie cinétique de la branche de masse M s'écrit $\frac{1}{8} M \left(\frac{dy_f}{dt} \right)^2$.

3.1.5 Justifier la conservation de l'énergie mécanique.

Écrire la conservation de l'énergie puis la dériver pour en déduire l'équation du mouvement.

On se propose de retrouver l'équation du mouvement de la branche à partir de l'application du Principe fondamental de la Dynamique ou 2^{ème} loi de Newton :

Déterminer l'expression de l'accélération du centre de gravité de la branche en fonction de y_f .

On admet que la force \vec{F} ramenée au centre de gravité de la force est doublée : $\vec{F}' = 2 \vec{F}$.

Conclure.

Donner l'expression de la fréquence propre de vibration de la branche. Faire l'AN approchée.

3.1.6. Modifier l'équation précédente en tenant compte des phénomènes dissipatifs dont on supposera qu'ils sont modélisés par une force proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\lambda \frac{dy_f}{dt} \vec{u}_y$

et s'appliquent au centre de gravité de la branche.

On présentera l'équation sous la forme $\frac{d^2 y_f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy_f}{dt} + \omega_0^2 y_f = 0$

en exprimant ω_0 et Q en fonction de M , K et λ .

3.1.7. On s'intéresse à la solution en régime critique d'oscillations amorties.

- Qu'est-ce qui distingue le régime critique des deux autres régimes d'amortissement ? Illustrer votre réponse par des allures de graphiques.
- Retrouver la valeur du facteur de qualité Q en régime critique.
- Écrire la solution analytique, en faisant intervenir deux constantes d'intégration. Qu'est-ce qui détermine ces constantes ?

Un oiseau de masse m_0 se pose au milieu sur la branche précédemment étudiée.

On note \vec{g} l'accélération de pesanteur terrestre.

3.1.8 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le mouvement de l'extrémité de la branche.

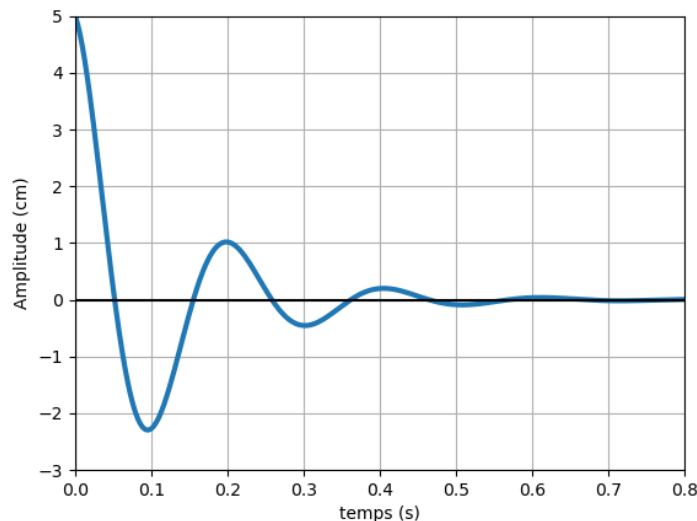
Identifier les nouvelles expressions de la pulsation propre ω'_0 et du facteur de qualité Q' .

Commenter le sens de variation de ces deux grandeurs par rapport à ω_0 et Q (sans l'oiseau).

Justifier qu'on peut observer un régime pseudo-périodique.

Rappeler les expressions de la pseudo-période T et du temps de décroissance exponentielle τ en fonction de ω'_0 et Q' .

L'amplitude algébrique des oscillations par rapport à l'équilibre en fonction du temps est :



On rappelle la définition du décrément logarithmique d'une fonction temporelle $X(t)$ de limite nulle et de pseudo-période T : $\delta = \ln \left(\frac{X(t)}{X(t+T)} \right)$.

3.1.9. En expliquant précisément votre méthode, déterminer la masse m_0 de l'oiseau.

2. Oscillation forcée d'une branche horizontale sous l'effet du vent

On ne tient toujours pas compte du poids de la branche. Les rafales du vent que l'on modélise comme périodiques et sinusoïdales mettent la branche en oscillation, l'équation prend ainsi la

forme $\frac{d^2 y_f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy_f}{dt} + \omega_0^2 y_f = A \cos(\omega t)$.

3.2.1. Donner, en la justifiant, l'unité de la quantité A .

3.2.2. On cherche une solution sous la forme $y_f = y_{f0} \cos(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression de y_{f0} en fonction de A , ω , ω_0 et Q .

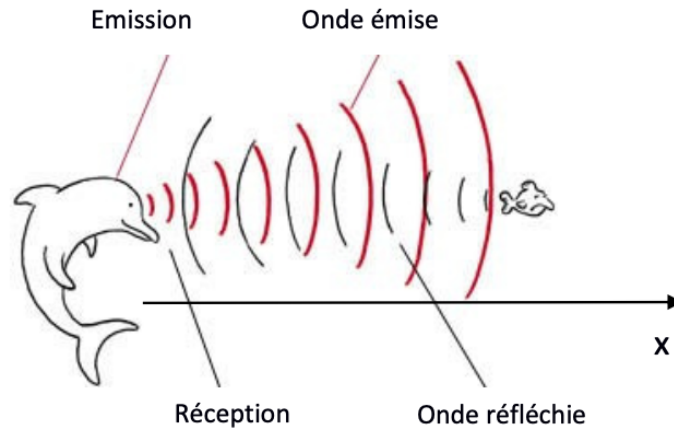
3.2.3. Montrer que le système peut présenter une résonance, et démontrer la condition que le facteur de qualité Q doit respecter pour qu'elle apparaisse.

À quel système vous fait penser cette résonance ?

Peut-on voir un phénomène de résonance apparaître *sans l'oiseau ? avec l'oiseau ?*

Partie E : Écholocation ou nioum

Les dauphins et leurs cousins cétacés ont développé une utilisation très particulière des ondes sonores : l'écholocation. Le principe est exactement le même que celui du sonar, utilisé par les hommes pour la localisation sous-marine : il s'agit d'émettre un signal sonore en direction d'une cible (une proie ou un obstacle) et d'en capter l'écho pour en déduire des informations sur cette cible.



La célérité des ondes sonores dans l'eau est $c=1500$ m/s. Les trains d'onde émis par les dauphins pour l'écholocation ont une fréquence moyenne de $f_0=75$ kHz et une durée moyenne $\Delta t=100$ μ s.

4.2.1. Déterminer la longueur d'onde λ_0 des clics ainsi que leur étendue spatiale Δx .

4.2.2. Pour une cible située à 100 m, évaluer la précision relative sur la durée d'un aller-retour de l'onde sonore.

4.2.3. Le signal réfléchi est d'amplitude plus faible que le signal émis. Pour quelles raisons ?

Dans la suite, on négligera l'amortissement.

4.2.4. Si le poisson s'éloigne, la fréquence du signal reçu est-elle plus grande, plus petite, ou égale à la fréquence du signal émis ?

Comment se nomme cet effet ?

Pour modéliser le phénomène précédant, on considère que le dauphin est statique, et émet une onde sonore $p_0(x,t) = A \cos(\omega_0 t - k_0 x)$. Le poisson cible se déplace à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et sa position initiale est notée x_0 .

4.2.5. Quelle est la nature et le sens de propagation de l'onde ? Justifier.

Que représentent ω_0 et k_0 ? Les relier à la fréquence et à la longueur d'onde de l'onde incidente. Quelle est la relation entre k_0 et ω_0 ?

4.2.6. L'expression analytique du signal sonore perçu par le poisson cible est $p_1(t)$.

Le signal acoustique émis à l'instant t par le dauphin est reçu par le poisson à l'instant t' .

Justifier que $p_1(t') = p_0(0, t)$.

Déterminer l'expression de t en fonction de t' , v_0 , c et x_0 .

En déduire sa fréquence f_1 .

4.2.7. Le poisson est alors une source mobile émettant à la fréquence f_1 .

Quelle est la fréquence f_2 du signal perçu par le dauphin ?

4.2.8. Conclure sur la mesure de vitesse du poisson par le dauphin.

Dans quel autre domaine ce double effet est-il aussi utilisé ?

Partie F : Chant de basse fréquence du rorqual commun ou sous l'océan

Le rorqual commun (*Balaenoptera physalus*) est un cétacé à fanons d'une longueur moyenne de 20 m et d'une masse moyenne d'environ 50 tonnes (Figure 1). C'est le plus grand animal au monde après le rorqual bleu. Présent dans toutes les mers du globe, il est capable de plonger à des profondeurs importantes, de l'ordre de plusieurs centaines de mètres. Les rorquals communs communiquent par des sons puissants de basse fréquence au niveau de la fréquence minimale audible par l'être humain voire en dessous.



Figure 1. Rorqual commun.

Sauf mention contraire dans l'énoncé, on prendra les valeurs suivantes pour l'eau de mer : masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; célérité du son $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. 0. Rappeler la gamme de fréquences des sons audibles par l'oreille humaine.
En déduire la gamme des longueurs d'onde pour ces sons dans l'eau.

1. Propagation du son dans l'océan

- 1.1. Relier l'indice optique d'un milieu et la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et tracer la marche d'un rayon d'incidence i_1 se réfractant d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent.
- 1.2. Donner la définition d'un dioptre acoustique. Dans la suite du problème, le dioptre acoustique sera traité de la même façon qu'un dioptre en optique. Par analogie avec l'optique, définir un indice de réfraction à partir de la vitesse du son dans le milieu et d'une vitesse de référence c_0 .
- 1.3. Soient deux couches d'eau de mer à l'intérieur d'un océan, séparées par un dioptre acoustique horizontal. La vitesse du son est différente dans les deux couches. On notera c_1 la vitesse du son dans la couche supérieure et c_2 la vitesse du son dans la couche inférieure. On traitera ce dioptre comme un dioptre en optique. Une onde sonore arrive sur l'interface avec un angle d'incidence i_2 (par rapport à la normale au dioptre) depuis la couche inférieure. En supposant $c_2 < c_1$, établir à quelle condition sur i_2 il y a réflexion totale à l'interface.

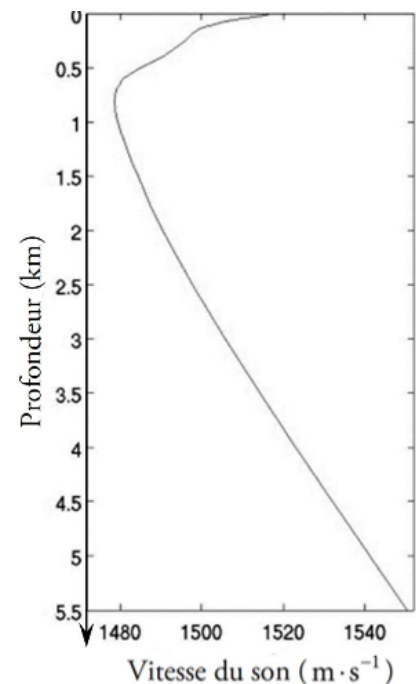


Figure 2. Variation de la vitesse du son avec la profondeur dans un océan.

Dans un océan, à l'exception des océans polaires, la vitesse du son dans l'eau passe par une valeur minimale pour une profondeur z_m comprise généralement entre 500 m et 1000 m (Figure 2).

On modélise cette situation par un premier modèle très simple à trois couches : une couche supérieure notée 1 entre la surface et une profondeur z_1 , une couche intermédiaire 2 entre les profondeurs z_1 et z_2 et une couche inférieure 3 en dessous de z_2 (Figure 3). La vitesse du son est c_1 , c_2 et c_3 dans les couches 1, 2 et 3 respectivement. On suppose $c_3 = c_1$ et $c_2 < c_1$. Les deux interfaces entre les couches seront traitées par analogie avec les dioptres optiques.

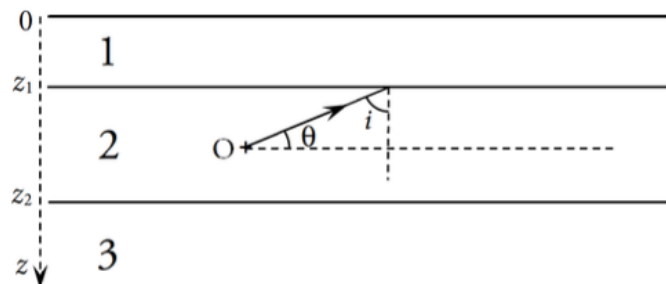


Figure 3. Modèle à trois couches.

1.4. Une source en un point O de la couche intermédiaire émet une onde sonore dans une direction faisant un angle θ (compris entre 0 et $\pi/2$) avec l'horizontale (voir **Figure 3**). Expliquer pourquoi l'onde sonore émise en O reste confinée dans la couche intermédiaire pour certaines valeurs de l'angle θ . Déterminer l'intervalle des valeurs de θ pour que ce soit le cas. Calculer numériquement les valeurs limites de cet intervalle. Tracer la marche d'un rayon illustrant ce confinement.

Données : $c_1 = c_3 = 1,51 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $c_2 = 1,48 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.6. tracer, qualitativement et sans aucun calcul, l'allure de la marche d'un rayon confiné, c'est-à-dire n'atteignant jamais ni la surface de l'océan ni le fond, pour une variation continue de la vitesse du son.

2. Amortissement du son de basse fréquence dans les océans

On étudie maintenant l'amortissement de l'onde sonore dû aux phénomènes dissipatifs. Pour le chant à basse fréquence du rorqual commun, l'amortissement de l'onde est principalement attribué à la présence d'acide borique dans l'eau de mer provenant de l'érosion de roches magmatiques.

L'acide borique a pour formule B(OH)_3 . Pour alléger les écritures, on notera $x = [\text{B(OH)}_4^-]$.

La variation de concentration en acide borique Δx , nulle à l'instant initial, vérifie pour $t > 0$:

$$\frac{d\Delta x}{dt} + \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{\Delta x_e}{\tau}.$$

avec $\tau = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ la constante de temps et Δx_e variation constante à l'état d'équilibre final.

2.5. Résoudre cette équation et tracer l'allure de la courbe donnant les variations de Δx en fonction du temps pour $t > 0$ en supposant $\Delta x_e > 0$.

Le passage d'une onde sonore de pulsation ω provoque une perturbation sinusoïdale au lieu d'un échelon. Il apparaît alors un terme de forçage sinusoïdal au second membre de l'équation différentielle, qui devient, en notation complexe

$$\frac{d\underline{\Delta x}}{dt} + \frac{\underline{\Delta x}}{\tau} = \frac{\underline{\Delta x}_e}{\tau}, \text{ où } \underline{\Delta x}_e = A_0 e^{i\omega t}.$$

Dans cette équation, $\underline{\Delta x}$ désigne la grandeur complexe associée à Δx , $\underline{\Delta x}_e$ est la perturbation sinusoïdale en notation complexe et A_0 est une amplitude réelle. On se place en régime sinusoïdal forcé.

2.6. Le système se comporte comme un filtre. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{\Delta x} / \underline{\Delta x}_e$ sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Identifier H_0 et ω_0 . Nommer ω_0 .

2.7. Établir l'expression du gain $G = |\underline{H}|$ et de la pulsation de coupure à -3 dB notée ω_c .

2.8. En justifiant la réponse, identifier la nature du filtre (passe-bas, passe-haut ou passe-bande).

Tracer le diagramme de Bode asymptotique et réel en gain et en phase.

2.9. Calculer numériquement la fréquence de coupure $f_c = \omega_c / (2\pi)$. Comparer cette valeur à la fréquence du chant de basse fréquence du rorqual commun. En déduire une estimation qualitative de l'importance de l'amortissement du chant de basse fréquence du rorqual commun.

3. Cordes vocales du rorqual commun

Les cordes vocales du rorqual commun peuvent être modélisées comme des "Cordes de Melde" fixées aux deux extrémités, de longueur L , sur lesquelles les ondes progressives se propagent à la vitesse $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ avec T la tension dans la corde et μ la masse linéique de la corde.

3.1. Donner l'expression générale d'une onde stationnaire.

3.2. Déterminer les expressions des fréquences f_n des modes propres de la corde vocale par la méthode analytique. Vérifier votre résultat par la méthode graphique.

3.3. La constitution physique d'une corde vocale étant fixée, quel est le paramètre permettant de modifier la hauteur de la note produite par la corde vocale ?

Indiquer la modification de fréquence fondamentale de vibration de la corde pour une modification de la hauteur de note de une octave. En déduire la modification de la valeur de paramètre identifié précédemment pour monter la note d'une octave.

Partie G : Mesure de la fréquence cardiaque ou la vie

La contraction d'un muscle, le cœur en particulier, crée un signal électrique. La détermination du rythme cardiaque passe par la mesure de la différence de potentiel électrique de l'ordre de quelques dizaines de mV. Le rapport signal sur bruit est en général plutôt faible. Il est donc nécessaire de mettre en forme le signal avant de pouvoir extraire la fréquence cardiaque. Cette partie se propose d'étudier les différentes étapes de mise en forme du signal. Après amplification (non étudiée), le signal est soumis à deux opérations de filtrage.

Pour tout signal sinusoïdal $u(t)$, la grandeur complexe associée sera notée \underline{u} . Tous les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux.

Le signal amplifié est appliqué en entrée d'un filtre dont la structure est donnée **figure 4**.

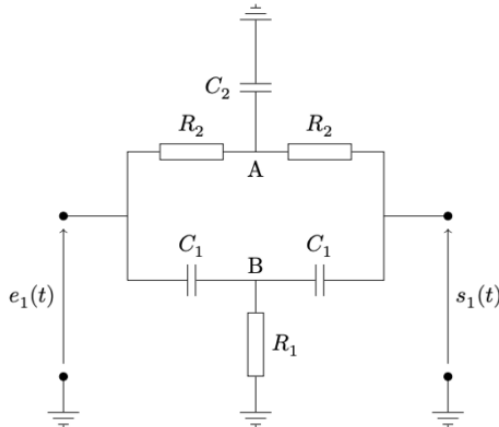


Figure 4

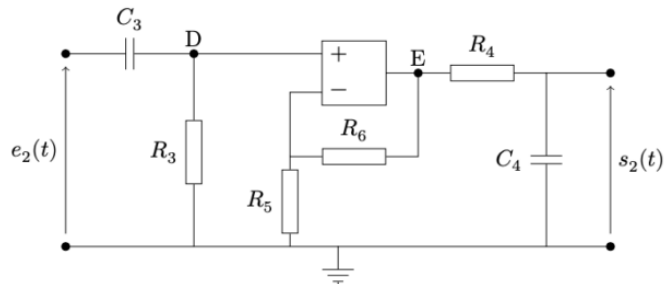


Figure 5

On donne les valeurs des composants : $R = R_1 = R_2/2 = 16 \text{ k}\Omega$ et $C = C_1 = C_2/2 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

Ce filtre est un filtre réjeteur : il ne transmet pas les signaux dont la pulsation est voisine de $\omega_0 = \frac{1}{2RC}$.

II.A.1) En étudiant de façon qualitative le comportement basses et hautes fréquences, justifier qu'il est légitime de dire que le filtre de la figure 4 est un filtre réjeteur.

II.A.2) Calculer la valeur de la fréquence f_0 associée à ω_0 . Pourquoi ce filtre est-il important dans le cas présent ?

La fréquence des battements cardiaques étant comprise dans un intervalle relativement restreint et de façon à s'affranchir au maximum de parasites hautes et très basses fréquences, on applique un filtre passe-bande au signal obtenu en sortie du filtre précédent. La structure du circuit utilisé est donnée **figure 5**.

II.B.1) Comment faut-il relier le circuit précédemment étudié et le circuit de la **figure 5** pour que le signal $s_1(t)$ obtenu en sortie du filtre réjeteur ne soit pas perturbé par l'ajout du montage de la **figure 5** ? (c'est-à-dire que le filtre réjeteur soit en sortie ouverte $i = 0$ mais $s_1(t) = e_2(t)$).

II.B.2) Justifier de façon qualitative que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire. Montrer de façon qualitative que ce circuit présente bien un caractère passe-bande.

II.B.3) On souhaite que la fréquence de coupure basse soit égale à 0,5 Hz et la haute égale à 150 Hz. Ces valeurs sont-elles compatibles avec les fréquences cardiaques humaines ?

Rappeler la fonction de transfert canonique d'un passe-bande du deuxième ordre avec le gain à la résonance H_0 , la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q .

Déterminer les expressions des fréquences de coupure basse et haute du passe-bande du 2^{ème} ordre en fonction de la fréquence propre f_0 et du facteur de qualité Q .

En déduire l'expression de la bande passante en fréquence en fonction de f_0 et Q .

Le passe-bande de la **Figure 5** présente une fonction de transfert factorisable qu'on peut déterminer en étudiant chaque étage individuellement.

II.B.4) En évaluant successivement les quotients V_D/e_2 , V_E/V_D et s_2/V_E , montrer que la fonction de transfert $H_2 = s_2/e_2$ s'exprime comme le produit de trois fonctions de transfert très simples. On précisera le rôle de chacune d'entre elles.

II.B.5) Proposer pour R_3 , R_4 , C_3 et C_4 des valeurs permettant de réaliser le filtrage souhaité. Les valeurs proposées devront être compatibles avec les composants couramment utilisés en travaux pratiques.

II.B.6) En plus de la fonction filtrage, le filtre proposé possède un deuxième avantage. Lequel ?

II.D – Qu'est-ce qui peut fausser la mesure du rythme cardiaque ?

Partie H : Résolution de problèmes : *Danionella translucida* ou Lucette

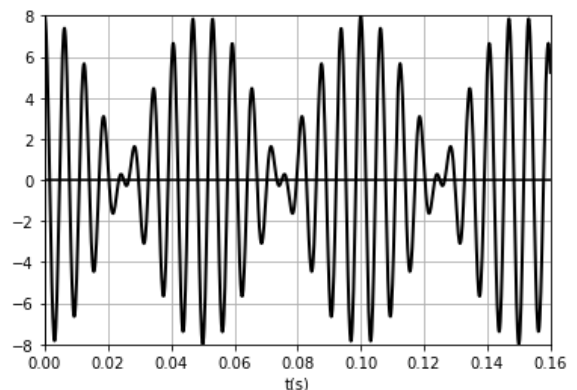
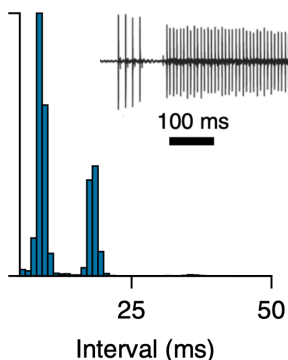
Ancien programme de Physique PCSI :

"Dans l'acquisition de l'autonomie, la résolution de problèmes est une activité intermédiaire entre l'exercice cadré qui permet de s'exercer à de nouvelles méthodes, et la démarche par projet, pour laquelle le but à atteindre n'est pas explicite. Il s'agit pour l'étudiant de mobiliser ses connaissances, capacités et compétences afin d'aborder une situation dans laquelle il doit atteindre un but bien précis, mais pour laquelle le chemin à suivre n'est pas indiqué. [...]"

La résolution de problèmes mobilise les compétences qui figurent dans le tableau ci-dessous."

Compétence	Exemples de capacités associées
S'approprier le problème.	Faire un schéma modèle. Identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole. Évaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées. Relier le problème à une situation modèle connue.
Établir une stratégie de résolution (analyser).	Décomposer le problème en des problèmes plus simples. Commencer par une version simplifiée. Expliciter la modélisation choisie (définition du système, ...). Déterminer et énoncer les lois physiques qui seront utilisées.
Mettre en œuvre la stratégie (réaliser).	Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée. Savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique. Utiliser l'analyse dimensionnelle ...
Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider).	S'assurer que l'on a répondu à la question posée. Vérifier la pertinence du résultat trouvé, notamment en comparant avec des estimations ou ordres de grandeurs connus. Comparer le résultat obtenu avec le résultat d'une autre approche (mesure expérimentale donnée ou déduite d'un document joint, simulation numérique, ...). Étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue.
Communiquer.	Présenter la solution, ou la rédiger, en expliquant le raisonnement et les résultats.

Des chercheurs de Berlin ont publié leurs résultats de l'étude du chant du poisson *Danionella translucida* dans la revue scientifique **Nature methods** : ils ont enregistré le chant du poisson mâle seul pour présenter le décompte des périodes sous la forme d'un histogramme. L'enregistrement des chants simultanés du poisson mâle et du poisson femelle est enfin tracé.



Quelle est la fréquence f_2 du chant du poisson femelle ?

