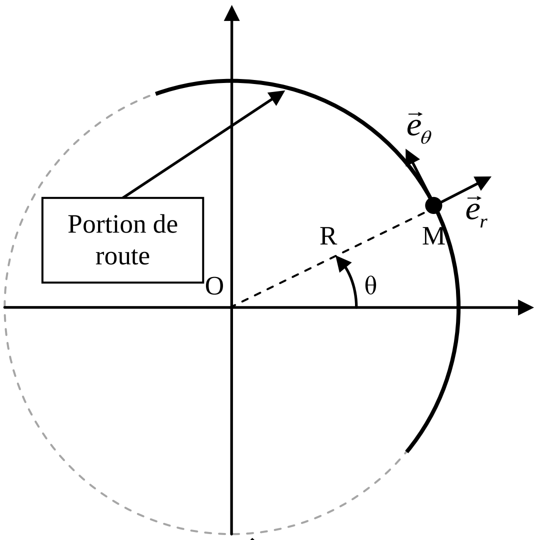
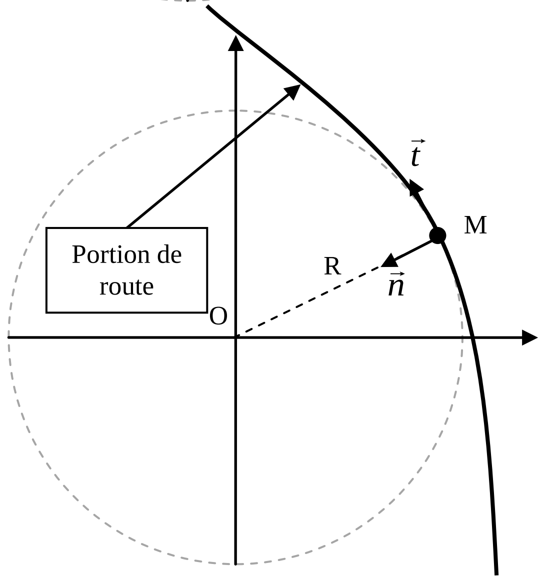
Problème 1 : description des mouvements d'une voiture.

a. Courbure des autoroutes.



1. Pour une trajectoire circulaire, la base de projection adaptée est la base polaire centrée sur O le centre du cercle.
2. Le vecteur position s'exprime $\overrightarrow{OM} = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_r$; le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R} = \mathrm{R}\,\dot{\theta}\vec{\mathrm{e}}_\theta = v_O\vec{e}_\theta$; le vecteur accélération $\vec{a}_{M/R} = -\mathrm{R}\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathrm{e}}_r = -\dfrac{v_O^2}{R}\vec{e}_r$



3. La base locale de Frenet permet de généraliser les résultats précédents à toutes les sections d'autoroute.

Le vecteur vitesse s'exprime alors $\vec{v}_{M/R} = v_O\vec{t}$ où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de parcours de la trajectoire ; Le vecteur accélération s'exprime $\vec{a}_{M/R} = \dfrac{v_O^2}{R}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la trajectoire orientée vers l'intérieur de sa « courbure ». On appelle alors R le « rayon de courbure » en M de la trajectoire et le cercle de rayon R tangent à la trajectoire en M est le cercle osculateur.

4. Pour une vitesse v_O le rayon minimal R_{min} est exprimé en traduisant le critère donné : $\left\|\vec{a}_{M/R}\right\| = \dfrac{v_O^2}{R} < \mu g$

d'où $\boxed{R > R_{\min} = \dfrac{v_O^2}{\mu g}}$ A.N : $\boxed{R_{\min}\left(130 km/h\right) = 1{,}1 km}$; $\boxed{R_{\min}\left(110 km/h\right) = 0{,}8 km}$

5. La carte est cohérente avec ces données puisque les rayons sont systématiquement supérieurs aux valeurs limite, la différence entre les deux valeurs étant la marge de sécurité nécessaire pour que monsieur ou madame tout le monde voyage sur le réseau autoroutier en toute sécurité sans avoir l'impression de vivre un grand prix de formule 1 à chaque voyage.

b. Freinage d'urgence.

6. On modélise le mouvement comme étant rectiligne le long de l'axe (Ox) en prenant pour origine O l'instant où le piéton commence sa traversée.

Le mouvement du véhicule suit deux phases :

- Un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse v_i pendant la durée δt, pendant laquelle il parcourt la distance $x_1 = v_i\delta t$ qu'on évalue numériquement à $x_1 \approx 14$m.
- Un mouvement de translation rectiligne uniformément décéléré au cours duquel l'accélération est $\ddot{x} = -a$; la vitesse est : $\dot{x}(t) = -a\left(t - \delta t\right) + v_O = v_O - at'$; et la position est $x(t') = v_O t' - a\dfrac{t'^2}{2} + x_1$

- Le véhicule s'arrête à l'instant $t_a' = \frac{v_O}{a}$; il est alors à la position $x_a = \frac{v_O^2}{2a} + x_1$

L'application numérique donne : $x_a = 28m$ le piéton est donc sauf.

c. Entrée de parking.

7. On travaille ici dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ (voir cours pour les schéma associés)…
8. Le vecteur position s'exprime alors avec les coordonnées fournies $\overrightarrow{OM} = \mathrm{R}\vec{e}_r + v_o t\vec{e}_z$, le vecteur vitesse s'exprime $\vec{v}_{M/R} = \mathrm{R}\,\omega_O\,\vec{e}_\theta + v_o\vec{e}_z$, le vecteur accélération s'exprime $\vec{a}_{M/R} = -\mathrm{R}\,\omega_O^2\,\vec{e}_r$
9. La trajectoire suivie est la composée d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan (xOy) et d'un mouvement de translation rectiligne uniforme le long de l'axe (Oz), il s'agit d'une hélice de pas constant.

Le pas désigne la hauteur dont on monte le long de (Oz) à chaque tour parcouru autour de l'axe (Oz).

Le véhicule effectue un tour sur une durée $T = \frac{2\pi}{\omega_O}$, le pas est alors exprimé par $pas = v_O T = \frac{2\pi v_O}{\omega_O}$.

10. Le vecteur vitesse présente une composante horizontale $v_\theta = \mathrm{R}\,\omega_O$ et une composante verticale $v_z = v_O$.

Le vecteur vitesse présente alors la norme $\left\|\vec{v}_{M/R}\right\| = \sqrt{\left(\mathrm{R}^2\,\omega_O^2 + v_O^2\right)}$. On monte alors d'une distance $v_O\Delta t$ à chaque fois qu'on parcourt une distance $\left\|\vec{v}_{M/R}\right\|\Delta t$ le long de la rampe.

Le pourcentage de la pente est alors $\% = 100 * \frac{v_O}{\sqrt{\left(\mathrm{R}^2\,\omega_O^2 + v_O^2\right)}}$

11. On souhaite que le véhicule ne dérape pas sur la pente, il faut donc respecter $\left\|\vec{a}_{M/R}\right\| = R\omega_O^2 < \mu g$

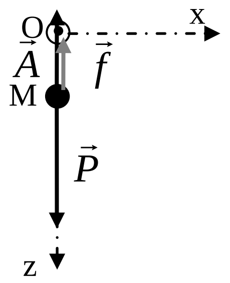
La vitesse maximale de rotation sera donc $\omega_{\max} < \sqrt{\frac{\mu g}{R}} = 0,32 rad.s^{-1} = 3 tours/\mathrm{min}$

On reprend le pourcentage $\% = 100 * \frac{v_O}{\sqrt{\left(\mathrm{R}\,\mu g + v_O^2\right)}}$, on en déduit $v_O = \%\sqrt{\left(\frac{\mathrm{R}\,\mu g}{10^4 - \%^2}\right)} = 0,46 m.s^{-1} = 1,6 km.h^{-1}$

et la norme de la vitesse est $\left\|\vec{v}_{M/R}\right\| = 100\sqrt{\left(\frac{\mathrm{R}\,\mu g}{10^4 - \%^2}\right)} = 3,7 m.s^{-1} = 13 km.h^{-1}$

Problème 2 : Chute libre dans la glycérine.

1. On considère la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on attache le référentiel (O,x,y,z). On utilise une base de projection cartésienne $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.



Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\vec{g}$
- Poussée d'Archimède : $\vec{A} = -\rho_O\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\vec{g}$
- Frottement : $\vec{f} = -6\pi\eta R.\vec{v}_{M/R}$

2. On applique la loi de la quantité de mouvement à la bille : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \vec{P} + \vec{A} + \vec{f}$

On étudie alors la seule projection selon le vecteur $\vec{e}_z$: $\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\frac{dv}{dt}(t) + 6\pi\eta R v(t) = \left(\rho - \rho_O\right)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g$

Qu'on peut mettre sous la forme : $\boxed{\frac{dv}{dt}(t) + \frac{9\eta}{2\rho R^2}v(t) = \left(1 - \frac{\rho_O}{\rho}\right)g}$

3. On a affaire à une équation différentielle linéaire à coefficient constant avec second membre constant.

SGEH : $S(t) = C.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\boxed{\tau = \frac{2\rho R^2}{9\eta}}$ SPEC : $\boxed{S_P(t) = v_{\lim} = \frac{2\left(\rho - \rho_O\right)gR^2}{9\eta}}$

La vitesse prend alors la forme : $v_{\lim} + C.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

La condition initiale donne : $v(0) = 0$ d'où $\boxed{v(t) = v_{\lim}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$

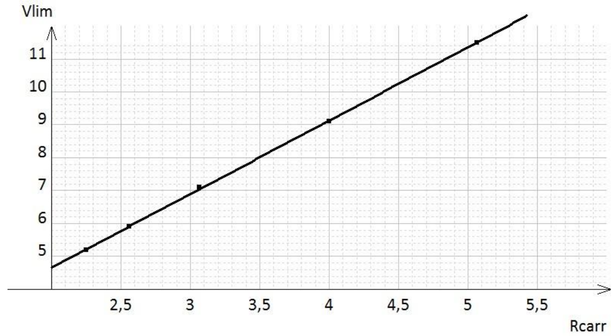
4. On intègre la loi de vitesse en fonction du temps pour obtenir : $\boxed{z(t) = v_{\lim}\left(t + \tau\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1\right)\right)}$

5. $\boxed{\tau = \frac{v_{\lim}\,\rho}{\left(\rho - \rho_O\right)g}}$ $\boxed{z(\tau) = v_{\lim}\,\tau\exp(-1)}$

R(mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
v_{lim} (cm.s^{-1})	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5
τ(ms)	6,2	7,2	8,6	11	14
z(τ) (mm)	0,12	0,16	0,25	0,37	0,60

6. On lâche sans vitesse initiale la bille à la surface de la glycérine contenue dans une éprouvette. On place alors deux détecteurs à faisceau permettant de détecter le passage de la bille distants de L (50 cm par exemple) et permettant de mesurer le temps de parcours de cette hauteur L. On doit s'assurer que la bille a approximativement atteint la vitesse limite sur la zone délimitée, pour cela le premier détecteur doit être placé à une distance d (par exemple 5 cm) grande devant les distances z(τ) calculées précédemment.

7. Le tracé des points expérimentaux est donné sur le graphique ci contre où on a représenté la vitesse limite (en cm.s^{-1}) en fonction de R^2 en mm^2.



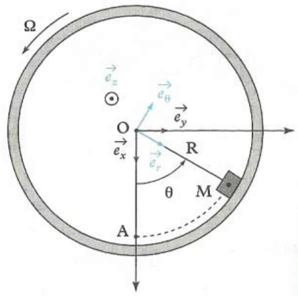
La pente est évaluée à a = 2,23±0,06 avec régressi.

On obtient alors pour la viscosité : $\boxed{\eta = \frac{2\left(\rho - \rho_O\right)g}{9a} = 6,4.10^{-1}\,kgm^{-1}s^{-1}}$

et $\boxed{u\left(\eta\right) = 1.10^{-2}\,kg.m^{-1}.s^{-1}}$

Problème 2 : Dans un tambour.

1. On considère le palet dans le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on attache le repère (O,x,y,z). On utilise la base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$.



Bilan des forces :

- Le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- L'action de contact : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

2. Si on suppose que le palet est entrainé par le tambour dans sa rotation, on exprime dans la base polaire les vecteurs demandés par : $\boxed{\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r}$; $\boxed{\vec{v} = R\Omega.\vec{e}_\theta}$; $\boxed{\vec{a} = -R\Omega^2.\vec{e}_r}$

3. On applique la loi de la quantité de mouvement : $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$

On la projette alors dans la base polaire :

Selon $\vec{e}_r$ $-mR\Omega^2 = mg\cos\theta + N$ avec $\vec{N} = N\vec{e}_r$ Selon $\vec{e}_\theta$ $0 = -mg\sin\theta + T$ avec avec $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$

On obtient alors : $\boxed{N = -mR\Omega^2 - mg\cos\theta}$ et $\boxed{T = mg\sin\theta}$

4. Le décrochage du palet aura lieu pour un angle θ_O si la composante normale de la réaction s'annule, ce qui donne comme condition : $0 = -mR\Omega^2 - mg\cos\theta_O$ $\cos\theta_O = -\dfrac{R\Omega^2}{g}$

On souhaite que le décrochage ne puisse pas avoir lieu, ce qui donne comme condition sur Ω : $\dfrac{R\Omega^2}{g} > 1$

On obtient pour valeur minimale $\boxed{\Omega_{\min} = \sqrt{\dfrac{g}{R}}}$ A.N : $\boxed{\Omega_{\min} = 5{,}3\,rad.s^{-1} = 50{,}5\,tours/\min}$

5. Avec la valeur choisie de Ω, il n'y a jamais « décrochage » du palet. D'après la loi de Coulomb, le palet ne glisse pas tant que : $|T| \le f|N|$.

Cette condition se traduit pour l'angle θ par : $\sin\theta < f\left(\dfrac{R\Omega^2}{g} + \cos\theta\right)$ (qui reste toujours positif d'après la q4)

Le glissement débute pour l'angle θ_1 si le coefficient de frottement est : $\boxed{f_1 = \dfrac{\sin\theta_1}{\dfrac{R\Omega^2}{g} + \cos\theta_1}}$ A.N : $\boxed{f_1 = 0{,}58}$