

## Mouvement d'un solide.

### 1. Description du mouvement d'un solide.

#### 1.1. Définition et description d'un système mécanique et d'un solide.

**Définition :** on appelle système mécanique, un ensemble matériel de composition quelconque dont on cherche à décrire le mouvement ou les déformations dans le cadre de la cinématique.

Un même système physique peut être décrit par différents systèmes physiques modèle dont la complexité permettra de rendre compte des phénomènes que l'on souhaite décrire ou expliquer.

Par exemple, on peut utiliser différents modèles pour décrire la planète Terre.

- On peut utiliser le modèle du point matériel pour étudier le mouvement de la Terre autour du Soleil, comme on l'a fait dans un cours précédent.
- On peut améliorer la description du mouvement de la Terre, en considérant qu'elle forme un système de deux points matériels avec la lune.
- Pour améliorer encore la description du mouvement de la terre, on peut la considérer comme un élément du système de points matériels associés à l'ensemble des planètes du système solaire.

Pour décrire le mouvement du système mécanique que représente la Terre en elle-même :

- On peut la considérer comme un point matériel, en étudiant le mouvement de ce point matériel, on étudie la translation de la Terre autour du soleil.
- On peut alors améliorer la description en l'envisageant comme un ensemble continu et indéformable de répartition de masse, c'est-à-dire comme un solide.
- Pour comprendre certains phénomènes comme le ralentissement de sa rotation horaire sous l'influence des effets de marée exercés par le Soleil et la Lune, on peut la considérer comme déformable.

A chaque étape, on rend le système plus complexe, permettant de rendre compte de phénomènes plus complexes.

Pour décrire un système mécanique, il faut le décomposer en un ensemble de sous-systèmes dont on peut décrire le mouvement :

- Dans un modèle discret du système, on considère qu'il comporte un ensemble discret de points matériels, on doit alors donner l'ensemble des positions des points et la masse qui leur est attribuée qu'on peut résumer sous la forme :  $\{\overline{OM}_i(t), m_i\} \quad i \in [1, N]$
- Dans un modèle continu du système, on considère qu'il est réparti dans l'espace et que chaque volume élémentaire de l'espace qu'il occupe présente une masse  $\mu(M,t)$ .

Dans le cadre du cours de cette année, on utilisera le modèle discret qui permet de rester dans un cadre de calcul compréhensible. Tous les résultats obtenus avec ce modèle se transposent au modèle continu en traduisant les expressions des grandeurs définies d'un modèle à l'autre.

Par exemple : pour  $\{\overline{OM}_i(t), m_i\} \quad i \in [1, N]$  la masse totale s'écrit  $m_\Sigma = \sum_{i=1}^N m_i$

Pour un système continu, la masse totale s'écrit :  $m_\Sigma = \iiint_V \mu(M,t) d\tau(M)$

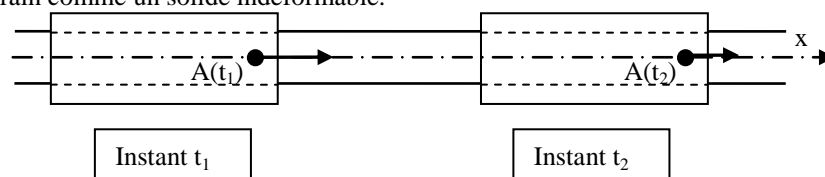
**Définition :** Un solide est un système matériel indéformable, la distance entre deux points dans le solide reste constante au cours du temps.

#### 1.2. Mouvement de translation d'un solide.

**Définition :** Un solide est en translation dans un référentiel d'étude lorsque tous les points du solide suivent le même mouvement, le vecteur vitesse est identique pour tous les points du solide.

##### a. Exemple d'un mouvement de translation rectiligne.

Prenons pour exemple un train à suspension magnétique lancé sur une portion rectiligne de rails. On modélise ce train comme un solide indéformable.



Dans le référentiel terrestre :

- Chaque point du train présente un vecteur vitesse identique à tout instant :  
A  $t_1$ , ils ont tous la même vitesse  $\vec{v}_A(t_1)$     A  $t_2$ , ils ont tous la même vitesse  $\vec{v}_A(t_2)$

- A chaque instant  $t$  ce vecteur vitesse est colinéaire à une direction constante :  $\vec{v}_A(t) = v(t)\vec{e}_x$ , la trajectoire de chaque point est donc un segment parallèle à l'axe Ox.

On parle alors d'un mouvement de translation car tous les points du solide présentent le même vecteur vitesse à chaque instant. La trajectoire de tout point du solide étant un segment on parle de translation rectiligne.

b. **Exemple d'un mouvement de translation circulaire.**

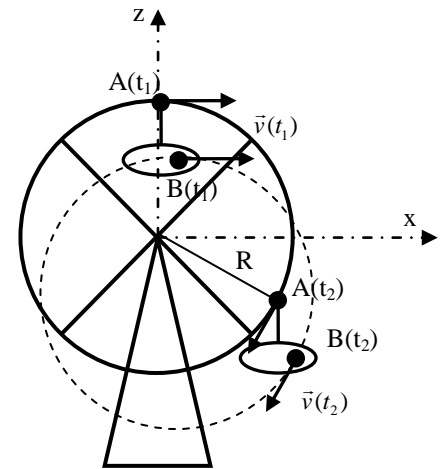
Prenons pour exemple une nacelle sur une grande roue de fête foraine.  
Dans le référentiel terrestre :

- Chaque point de la nacelle présente un vecteur vitesse identique à tout instant
- A  $t_1$ , vitesse  $\vec{v}(t_1)$  A  $t_2$ , vitesse  $\vec{v}(t_2)$
- La trajectoire d'un point au cours du temps est un cercle de rayon R.

Le mouvement décrit par la nacelle de la grande roue est une translation car tous les points présentent la même vitesse à chaque instant. La trajectoire étant un cercle, on parlera de translation circulaire.

Le vecteur vitesse sera exprimable en s'appuyant sur celle du point

$$A : \vec{v}(t) = \vec{v}_{A/R}(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

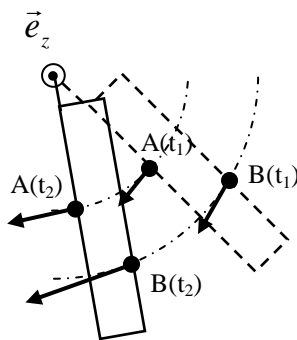


c. **Mouvement de translation dans le cas général.**

Dans le cas général pour décrire le mouvement d'un solide en translation dans un référentiel, il suffira de préciser que ce solide est en translation dans le référentiel considéré et de décrire le mouvement d'un point de ce solide. En général, on choisit alors ce point de manière à exprimer le plus simplement possible le vecteur vitesse.

1.3. **Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe.**

a. **Exemple explicatif.**



On considère une porte classique, qui s'ouvre en tournant autour de l'axe de ses gonds. L'axe est fixe dans le référentiel d'étude qui est le référentiel terrestre.

La porte tourne dans son ensemble autour de l'axe fixe Oz, chaque point peut être repéré par  $(r, \theta, z)$  dans le système de coordonnées cylindriques associées à la base de projection  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

Par exemple, à l'instant  $t_1$  :  $\vec{OA}(t_1) = r_A\vec{e}_{r,A} + z_A\vec{e}_z$

$$\vec{OB}(t_1) = r_B\vec{e}_{r,B} + z_B\vec{e}_z$$

Le vecteur  $\vec{e}_\theta$  de la base de projection dépend du point repéré et évolue en même temps que le point bouge.

Le vecteur vitesse de chaque point est exprimé par :

$$\vec{v}_{A/R}(t_1) = r_A\dot{\theta}\vec{e}_{\theta,A} \quad \vec{v}_{B/R}(t_1) = r_B\dot{\theta}\vec{e}_{\theta,B}$$

La vitesse de rotation est la même pour tous les points de la porte, mais le vecteur vitesse est différent :

- Sa norme dépend de la distance à l'axe de rotation  $r$  en coordonnées cylindriques.
- Sa direction est celle du vecteur  $\vec{e}_\theta$  de la base de projection cylindrique qui varie en fonction du point étudié.

La trajectoire de chaque point M du solide s'appuie sur un cercle de rayon  $r_M$  et de centre H le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz.

b. **Vecteur rotation et vitesse d'un point d'un solide en rotation.**

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe du référentiel d'étude. On choisit la base de projection pertinente pour décrire ce mouvement. L'axe Oz est choisi comme se confondant avec l'axe de rotation du solide. Pour chaque point M, on construit alors la base de projection cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

Il paraît alors pertinent de décrire ce mouvement par une grandeur caractéristique de cette rotation. Les grandeurs qui sont communes à tous les points du solide sont l'axe autour duquel s'effectue la rotation et la vitesse angulaire. On construit le vecteur rotation :  $\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\theta}\vec{e}_z$  en combinant ces deux éléments. Le vecteur position d'un point M du solide est alors exprimé par :  $\vec{OH} + \vec{HM} = z\vec{e}_z + r\vec{e}_r$ , H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz.

- Le vecteur vitesse est exprimé par :  $\vec{v}_{M/R} = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{OM} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

## 2. Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

### 2.1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe.

Prenons pour modèle de calcul un solide constitué d'un ensemble de points matériels  $\{M_i(t), m_i\}$   $i \in [1, N]$ .

Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe s'exprime en sommant les moments cinétiques individuels des points matériels :  $L_{Oz;S} = \sum_i L_{Oz;M_i}$

Le calcul donne alors :  $L_{Oz;S} = \sum_i \left[ m_i \left( \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{v}_{M_i/R} \right) \cdot \vec{e}_z \right] = \sum_i \left[ m_i \left( r_i \vec{e}_{r_i} + z_i \vec{e}_z \right) \wedge \left( r_i \dot{\theta} \vec{e}_{\theta_i} \right) \cdot \vec{e}_z \right]$

On obtient alors :  $L_{Oz;S} = \sum_i \left[ m_i \left( r_i^2 \dot{\theta} (\vec{e}_{r_i} \wedge \vec{e}_{\theta_i}) \cdot \vec{e}_z + r_i z_i \dot{\theta} (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{\theta_i}) \cdot \vec{e}_z \right) \right]$

Les produits mixtes donnent :  $(\vec{e}_{r_i} \wedge \vec{e}_{\theta_i}) \cdot \vec{e}_z = 1$  et  $(\vec{e}_z \wedge \vec{e}_{\theta_i}) \cdot \vec{e}_z = 0$

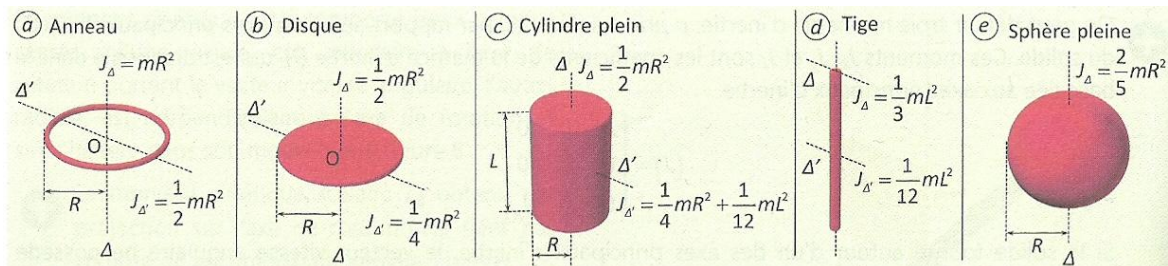
Et finalement  $L_{Oz;S} = \left[ \sum_i m_i r_i^2 \right] \dot{\theta}$

On observe donc que le moment cinétique du solide par rapport à l'axe de rotation s'exprime sous la forme du produit de la vitesse de rotation du solide autour de l'axe par une constante dépendant de la répartition de masse du solide autour de l'axe à laquelle on donne le nom de moment d'inertie.

**Définition :** Soit  $\Delta$  un axe, et S un solide, on définit le moment d'inertie  $J_{S/\Delta}$  de S par rapport à l'axe  $\Delta$  comme le coefficient de proportionnalité entre le moment cinétique du solide par rapport à l'axe  $\Delta$  et la vitesse de rotation  $\Omega$  du solide par rapport à cet axe :  $L_{Oz;S} = J_{S/\Delta} \Omega$

On peut remarquer que le moment d'inertie pour un solide en rotation autour d'un axe fixe joue un rôle équivalent à celui de la masse (inertielle) pour un système mécanique quelconque en translation.

### 2.2. Quelques exemples de moment d'inertie.



La figure ci-dessus donne pour différents exemples l'expression du moment d'inertie d'un solide par rapport à ses axes principaux.

On peut remarquer que :

- Le moment d'inertie est proportionnel à la masse de l'objet.
- Plus l'objet s'étend loin de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est important.
- Pour déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe, connaissant celui par rapport à un autre axe parallèle, on peut utiliser la formule précédemment établie :  $\vec{L}_{B;M} = \vec{BA} \wedge \vec{p}_{M/R} + \vec{L}_{A;M}$

Application au cas de la tige de longueur L : Le centre d'inertie G est situé sur l'axe  $\Delta'$ . Lorsque le solide est en rotation autour de l'axe  $\Delta$ , on peut écrire :  $L_{\Delta;S} = \left( \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_{S/R} \right) \cdot \vec{e}_\Delta + L_{\Delta';S}$

Si on note  $\Omega$  la vitesse de rotation autour de l'axe  $\Delta$ , on obtient :  $\left( \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_{S/R} \right) \cdot \vec{e}_\Delta = m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \Omega$

Ce qui nous donne alors :  $L_{\Delta;S} = \frac{1}{4} mL^2 \Omega + \frac{1}{12} mL^2 \Omega$  d'où  $J_{\Delta;S} = \frac{1}{3} mL^2$

## 3. Moment dynamique d'une action mécanique sur un solide.

### 3.1. Action mécanique de type glisseur.

Reprenons l'exemple d'un système de points matériels  $\{M_i(t), m_i\}$   $i \in [1, N]$ .

#### a. Force de gravité.

Sur chaque point  $M_i$  la gravité exerce une force :  $m_i \cdot \vec{g}$

Soit O un point fixe du référentiel R, le moment de cette action mécanique sur le solide en O s'exprime :

$$\vec{M}_O(S) = \sum_i \vec{M}_O(M_i) = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{g} = m_s \overrightarrow{OG} \wedge \vec{g}$$

La force de gravité est un exemple de glisseur. Son moment dynamique s'annule en un point (le centre d'inertie G) et on peut déterminer son moment dynamique en n'importe quel point en la modélisant comme un vecteur force totale, appelée résultante appliquée au centre d'inertie du solide.

**b. Action de contact solide.**

Prenons l'exemple d'une roue en contact avec le sol en un point I. C'est un autre exemple de glisseur, le moment dynamique de l'action de contact s'annule en I et il peut être déterminé en tout point en modélisant l'action par un vecteur force appliqué au point de contact I.

**c. Définition d'un glisseur.**

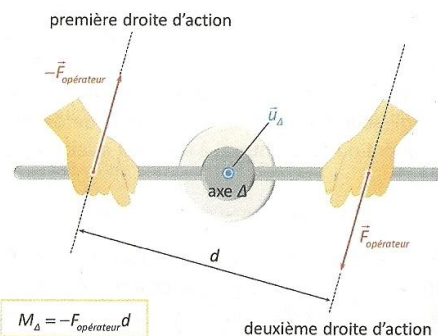
Un glisseur est une action mécanique sur un système de résultante non nulle  $\vec{F}$  et dont le moment dynamique s'annule en un point A. On peut alors déterminer le moment dynamique en tout point O en modélisant l'action comme un vecteur force  $\vec{F}$  s'appliquant en A :  $\vec{M}_{O,\vec{F}}(S) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$

**3.2. Action mécanique de type couple.**

**a. Exemple intuitif.**

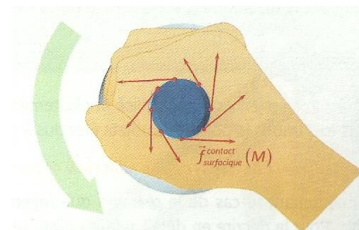
On exerce un couple sur la barre dans la situation représentée sur la figure ci-contre.

La somme des deux forces, c'est-à-dire la résultante des forces sur le solide, est nulle mais le moment dynamique par rapport à l'axe  $\Delta$  est non nul.

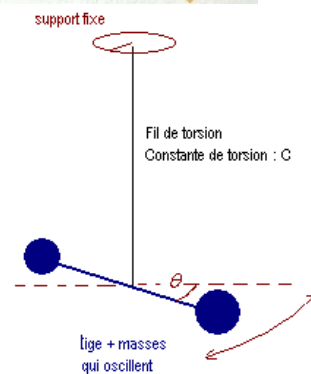


**b. Autres exemples.**

Un couple peut être le résultat d'une action de contact surfacique répartie comme lorsqu'on souhaite faire tourner un objet autour d'un axe. Sur la situation représentée ci-contre, la main cherche à faire tourner le bouchon par rapport à la bouteille.



Le fil de torsion s'oppose à la déformation qui lui est imposée par la rotation de la barre fixée à son extrémité. On modélise en général le comportement de ce type de système en le voyant comme l'analogue d'un ressort pour un mouvement de rotation. Le moment exercé par le fil de torsion sur la barre s'exprime  $M_{\Delta}(S) = -C(\theta - \theta_0)$  où  $\theta_0$  est l'angle pour lequel le fil de torsion n'est pas déformé.



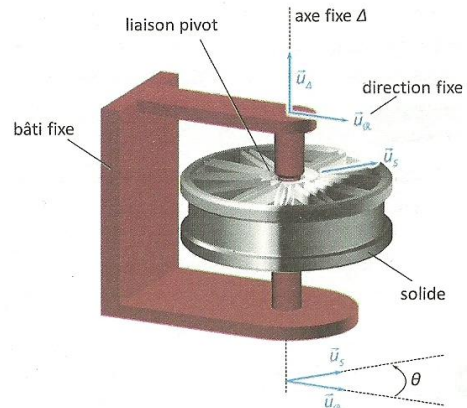
**c. Définition d'un couple.**

Un couple est une action mécanique sur un système qui est non nulle bien que de résultante nulle.

### 3.3. Action mécanique exercée par une liaison pivot.

La liaison pivot a probablement été présentée en cours de SI. On appelle liaison pivot un mécanisme laissant à un solide un unique degré de liberté en rotation autour d'un axe  $\Delta$ . En conséquence la liaison pivot est susceptible de produire une action mécanique contrant toute autre action mécanique cherchant à mettre en mouvement le solide selon un autre degré de liberté :

- Elle pourra exercer une résultante selon toutes les directions.
- Elle pourra exercer un moment selon les directions perpendiculaires à l'axe de rotation libre  $\Delta$  défini par la liaison.



Le mouvement étudié lorsqu'on considère une liaison pivot est celui de rotation autour de l'axe  $\Delta$ , l'action mécanique pertinente à étudier est le moment dynamique selon cet axe, on peut alors employer plusieurs modèles :

- Un moment dynamique de type frottement fluide linéaire qui s'opposerait à la rotation proportionnellement à la vitesse de rotation du solide étudié :  $M_{\Delta}(S) = -k_F \dot{\theta}$ . C'est un bon modèle pour les liaisons avec lubrification.
- Un moment dynamique de type frottement solide auquel on pourrait appliquer l'équivalent des lois de Coulomb en cas de contact direct entre le solide et le bâti solide.
- Un moment dynamique nul ou négligeable, dont on peut se rapprocher en utilisant des roulements à billes. On parle alors de liaison pivot idéale.

## 4. Théorème scalaire du moment cinétique et application.

### 4.1. Enoncé.

**Enoncé :** On considère un système solide en liaison pivot d'axe  $\Delta$  par rapport à un bâti fixe dans le référentiel terrestre, soumis à des actions mécaniques extérieures. Le théorème scalaire du moment cinétique pour ce solide

s'établit sous la forme : 
$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = J_{S/\Delta} \frac{d\Omega_{S/R}}{dt} = \sum M_{\Delta; Action_{ext} \rightarrow S}$$

### 4.2. Application à l'étude du pendule de torsion.

On considère un pendule de torsion, c'est-à-dire un solide de moment d'inertie  $J$  et équilibré par rapport à un axe de rotation ( $Oz$ ) (ici vertical) qui se confond avec la direction le long de laquelle on place une tige rigide reliée à un bout au pendule et à l'autre bout à un bâti fixe.

La tige est alors mise en torsion lorsque le pendule tourne autour de l'axe ( $Oz$ ) et elle exerce alors sur le pendule un couple de torsion élastique par rapport à l'axe ( $Oz$ ).

On désigne par  $\theta$  la position angulaire de la tige par rapport à une direction de référence.

Les actions mécaniques qui s'exercent sur le fil sont les suivantes :

- L'action de pesanteur, qui présente un moment dynamique par rapport à l'axe de rotation ( $Oz$ ) nul car le centre d'inertie est positionné sur l'axe de rotation. Cette propriété est imposée par le caractère équilibré du solide par rapport à ( $Oz$ ).
- L'action de contact exercée par la tige de torsion sur le solide et pour laquelle on emploie le modèle linéaire  $M_{(Oz)}(S) = -C\theta$  en choisissant pour direction de référence la direction dans laquelle la tige n'est pas torsadée.

Le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation ( $Oz$ ) s'écrit alors :

$$J_{(Oz)} \ddot{\theta} = M_{(Oz)}(S) = -C\theta$$

On met alors cette équation sous forme canonique :  $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{(Oz)}}}$



On reconnaît alors l'équation de l'oscillateur harmonique, et on observe que le pendule de torsion est l'équivalent en rotation du système masse ressort en translation.

Comme dans le cas du système masse ressort, la seule action mécanique qui travaille est l'action élastique qui s'exerce ici en torsion au lieu de s'exercer en rotation.

### 4.3. Application à l'étude du pendule pesant.

On considère un pendule pesant, de moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$  horizontal imposé par une liaison pivot supposée parfaite.

On note  $\theta$  l'angle fait par la droite sécante de l'axe  $\Delta$  passant par le centre d'inertie du pendule avec la verticale vers le bas.

On note  $l/2$  la distance de l'axe  $\Delta$  au centre d'inertie  $G$ .

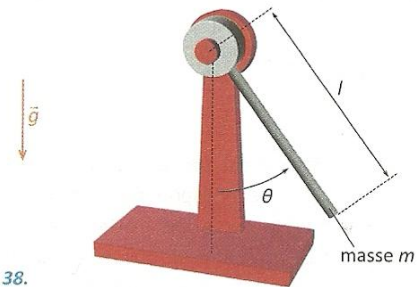


Fig 38.

Les actions mécaniques sur le pendule sont :

- L'action de contact au niveau de la liaison pivot supposée parfaite.
- L'action de la gravité terrestre vue comme un vecteur force  $m \cdot \vec{g}$  appliquée au centre d'inertie du pendule.

On écrit le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$  pour le pendule pesant :

$$J_{S/\Delta} \frac{d\Omega_{S/R}}{dt} = M_{\Delta, \vec{P}} + M_{\Delta, pivot}$$

La liaison pivot est parfaite et le moment du poids donne :  $\vec{M}_{\Delta, \vec{P}} = \frac{l}{2} \vec{e}_r \wedge mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$

D'où par projection sur l'axe  $\Delta$  :  $M_{\Delta, \vec{P}} = -m \frac{l}{2} g \sin \theta$

On obtient alors l'équation du mouvement :  $J_{\Delta/S} \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2} \sin \theta = 0$

On introduit alors la pulsation  $\omega_S = \sqrt{\frac{mgl}{2J_{\Delta/S}}}$  pour écrire finalement :  $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_S^2 \sin \theta = 0}$

Comme pour le pendule simple on peut alors identifier l'équation obtenu pour un mouvement aux petits angles avec le cas de l'oscillateur harmonique en linéarisant l'équation mouvement qui devient  $\ddot{\theta} + \omega_S^2 \theta = 0$

## 5. Approche énergétique du mouvement de rotation d'un solide.

### 5.1. Energie cinétique d'un solide en rotation.

Reprenons à nouveau le modèle d'un système de points :  $\{M_i(t), m_i\}$   $i \in [1, N]$  pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans le référentiel d'étude :

Pour chaque point :  $E_{C,i} = \frac{1}{2} m_i v_{M_i}^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \Omega^2$

En sommant sur les points :  $E_{C,S} = \sum_i E_{C,i} = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{S/\Delta} \Omega^2$

**Définition :** Soit  $\Delta$  un axe, et  $S$  un solide de moment d'inertie  $J_{S/\Delta}$  par rapport à l'axe  $\Delta$  et la vitesse de rotation  $\Omega$  du solide par rapport à cet axe, l'énergie cinétique totale du solide s'exprime alors :  $E_{C,S} = \frac{1}{2} J_{S/\Delta} \Omega^2$

### 5.2. Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation.

Pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans le référentiel d'étude, la loi de l'énergie cinétique se déduit directement de la loi sur le moment cinétique appliqué au solide par rapport à ce même axe  $\Delta$  par

multiplication par la vitesse de rotation  $\Omega_{S/\Delta}$  du solide :  $\Omega_{S/\Delta} \left( J_{S/\Delta} \frac{d\Omega_{S/\Delta}}{dt} \right) = \Omega_{S/\Delta} \left( M_{\Delta, \vec{F}_{ext \rightarrow S}} \right)$

Dans le premier terme, on exprime la dérivée de l'énergie cinétique du solide, dans le second terme la puissance des actions mécaniques extérieures s'appliquant au solide.

### 5.3. Application pour le pendule de torsion.

Pour ce système, on reconnaît une situation où la seule action mécanique qui travaille est conservative puisque cette action élastique (qui s'exerce ici en torsion lors de la rotation) a déjà été étudiée dans le cas du mouvement de translation d'une masse qui entraîne l'élongation d'un ressort.

Lorsqu'on applique le raisonnement amenant à la construction de la loi de l'énergie cinétique pour les systèmes en rotation autour d'un axe fixe au cas du pendule de torsion autour de l'axe (Oz) on obtient la relation suivante :

$\dot{\theta} J_{(Oz)} \ddot{\theta} + C \dot{\theta} \theta = 0$  situation qui nous amène selon un raisonnement déjà vu à plusieurs reprises à la réécriture

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \right) = 0$  où on identifie les grandeurs énergétiques suivantes :

- L'énergie cinétique associée au mouvement de rotation du pendule autour de l'axe (Oz) qui s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle élastique associée à la torsion de la tige et qui prend la même allure que celle associée à l'élongation d'un ressort :  $E_P = \frac{1}{2} C \theta^2$

- Et enfin l'énergie mécanique  $E_M = E_C + E_P$  et qui constitue donc une intégrale première du mouvement puisqu'elle est conservée au cours de l'évolution temporelle du pendule de torsion.

En effet :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \right) = 0$  se traduit  $\boxed{\frac{d}{dt} (E_M) = 0}$

### 5.4. Application pour le pendule pesant.

Pour le pendule pesant, l'action de contact exercée par la liaison pivot parfaite présentait un moment par rapport à l'axe  $\Delta$  nul. On en déduit ici que cette action de contact ne travaille pas.

La seule action mécanique extérieure qui fournit un travail au solide est donc l'action de gravité qui est conservative.

On peut donc obtenir une intégrale première du mouvement en multipliant par  $\dot{\theta}$  l'équation du mouvement

obtenue par application de la loi du moment cinétique par rapport à  $\Delta$   $J_{\Delta/S} \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2} \sin \theta = 0$

On réécrit alors cette équation sous la forme :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2} (1 - \cos \theta) \right) = 0$  où on identifie les grandeurs

énergétiques suivantes :

- L'énergie cinétique associée au mouvement de rotation du pendule autour de l'axe  $\Delta$  qui s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle de pesanteur :  $E_P = \frac{mgl}{2} (1 - \cos \theta) = mgz_G$  où  $z_G$  est l'altitude du centre d'inertie G par rapport à la position la plus basse obtenue lorsque  $\theta=0$ .

- Et enfin l'énergie mécanique  $E_M = E_C + E_P$  et qui constitue donc une intégrale première du mouvement puisqu'elle est conservée au cours de l'évolution temporelle du pendule de

torsion.  $\boxed{\frac{d}{dt} (E_M) = 0}$ .

On peut alors mener une étude de la nature du mouvement du pendule en fonction de la valeur prise par l'énergie mécanique :

- Premier cas,  $E_M < mgl$  alors il existe une position angulaire  $\theta_0$  pour laquelle  $E_M = \frac{mgl}{2} (1 - \cos \theta_0)$ , pour laquelle le pendule s'arrête puisque son énergie cinétique est nulle. Le pendule présentera alors un mouvement d'oscillation d'amplitude  $\theta_0$  autour de la position d'équilibre verticale vers le bas.
- Second cas,  $E_M > mgl$  alors il n'existe pas de position angulaire pour laquelle le pendule s'arrête, il présentera alors un mouvement de révolution autour de l'axe  $\Delta$  avec une vitesse angulaire variable (maximale en  $\theta=0$  et minimale en  $\theta=\pi$ ).

Si on revient au premier cas étudié, celui du mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre, on peut exprimer la période des oscillations en exploitant l'équation traduisant la conservation de l'énergie mécanique.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{mgl}{2} (1 - \cos \theta) \right) = 0$$

On peut la réécrire sous la forme

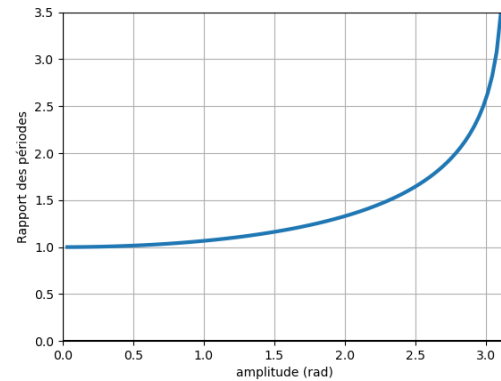
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_s \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

$$\text{d'où } \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \int_0^{T/4} \omega_s dt$$

$$\text{Ce qui donne : } T' = \frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

$T_0$  est la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

La courbe obtenue par intégration numérique est la suivante.



On observe alors que pour les grandes amplitudes, on perd le caractère d'isochronisme des oscillations.

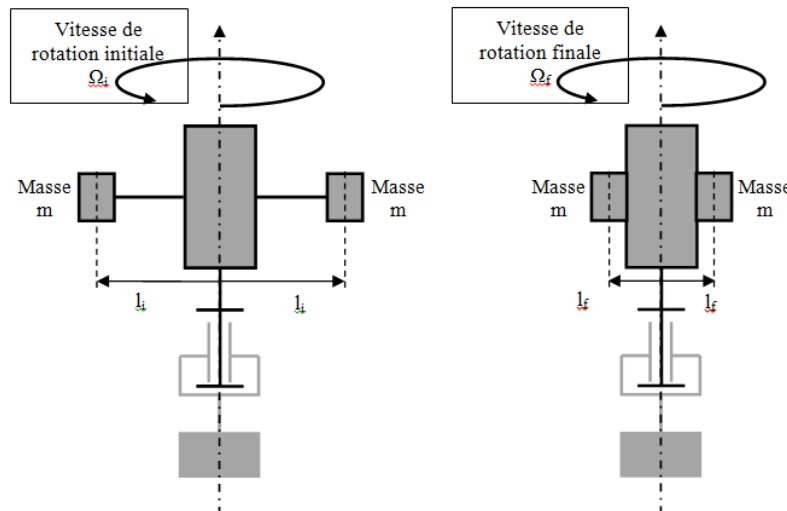
### 5.5. Cas d'un système déformable, le tabouret d'inertie.

On considère le système du tabouret d'inertie vu dans le film présenté en cours.

Le personnage du film est modélisé par un solide central de moment d'inertie  $J_z$  et deux altères quasi-ponctuelles de masse totale  $m$  (chaque altère est associée à une masse  $m/2$ ).

Lors du mouvement de ce système, les actions mécaniques qui s'exercent sont les suivantes :

- L'action de la liaison pivot avec la base du tabouret, que l'on suppose idéale.
- L'action de la gravité qui amène à un moment dynamique par rapport à l'axe  $Oz$  nul car elle est parallèle à l'axe de rotation.
- Les actions exercées par le personnage pour ramener les poids de la distance  $L_i$  à la distance  $L_f$ .



On peut alors appliquer le théorème du moment cinétique au système étudié par rapport à l'axe  $Oz$ .

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{z; Action_{ext} \rightarrow S}$$

- On peut toujours écrire la variation du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation à gauche, en revanche, puisqu'on n'a plus affaire à un solide (par définition indéformable), on ne pourra plus l'écrire en fonction d'un simple moment d'inertie.
- On ne doit tenir compte à droite que des actions mécaniques extérieures, c'est-à-dire ici, de l'action de la liaison pivot et de l'action de la gravité, à l'exclusion de l'action du personnage sur les altères puisqu'il s'agit d'actions intérieures.

On aboutit alors à la conclusion :  $\frac{dL_z}{dt} = 0$

Dans l'état initial :  $L_{z,i} = (J_{\Delta} + ml_i^2) \Omega_i$

Dans l'état final :  $L_{z,f} = (J_{\Delta} + ml_f^2) \Omega_f$

On obtient  $L_{z,i} = L_{z,f}$  ce qui donne :  $(J_{\Delta} + ml_i^2) \Omega_i = (J_{\Delta} + ml_f^2) \Omega_f$  d'où  $\Omega_f = \frac{J_{\Delta} + ml_i^2}{J_{\Delta} + ml_f^2} \Omega_i > \Omega_i$



Intéressons-nous alors à l'évolution de l'énergie cinétique du système entre l'état initial et l'état final :

$$E_{C,i} = \frac{1}{2}(J_{\Delta} + ml_i^2)\Omega_i^2 ; E_{C,f} = \frac{1}{2}(J_{\Delta} + ml_f^2)\Omega_f^2 = \frac{1}{2} \frac{(J_{\Delta} + ml_i^2)^2}{J_{\Delta} + ml_f^2} \Omega_i^2 = \frac{(J_{\Delta} + ml_i^2)}{J_{\Delta} + ml_f^2} E_{C,i}$$

On observe donc que :  $E_{C,f} - E_{C,i} = \frac{m(l_i^2 - l_f^2)}{J_{\Delta} + ml_f^2} E_{C,i} > 0$

On observe donc que l'énergie cinétique a été modifiée au cours de cette expérience, il y a eu un travail mécanique sur le système qui a entraîné cette modification. La seule source possible de travail dans ce système est le travail intérieur exercé par le personnage sur les altères.

**Conclusion :** Lorsqu'on étudie un système déformable en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  :

- on peut conserver l'écriture du théorème du moment cinétique :  $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum M_{\Delta; Action_{ext} \rightarrow S}$ . Il faut en revanche réfléchir à l'influence des déformations sur le moment d'inertie instantané du système.
- Il n'y a plus équivalence entre le théorème du moment d'inertie et le théorème de l'énergie cinétique, puisque le travail des actions mécaniques intérieures modifie l'énergie cinétique sans modifier le moment cinétique. On prouve alors que :  $\frac{dE_C}{dt} = \sum W_{Action_{ext} \rightarrow S} + \sum W_{Action_{int}}$

### Capacités exigibles

- Définition d'un solide : différencier un solide d'un système déformable.
- Translation : reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- Rotation autour d'un axe fixe : décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- Pour un solide, connaître et exploiter la relation entre moment cinétique scalaire, vitesse angulaire de rotation et moment d'inertie fourni.
- Définir un couple.
- Définir une liaison pivot et savoir justifier le moment qu'elle peut produire.
- Connaître et exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen
- Connaître et exploiter la relation entre énergie cinétique d'un solide en rotation, vitesse angulaire de rotation et moment d'inertie fourni (aucun moment d'inertie n'est à connaître)
- Connaître et exploiter le théorème de l'énergie (ou de la puissance) cinétique pour un solide en rotation
- Pour le pendule de torsion : Établir l'équation du mouvement, Expliquer l'analogie avec l'équation de l'oscillateur harmonique, Établir une intégrale première du mouvement.
- Pour le pendule pesant : Établir l'équation du mouvement d'un pendule pesant, l'identifier avec l'oscillateur harmonique dans l'approximation des petites oscillations, établir une intégrale première du mouvement, expliquer le point de bifurcation entre mouvement révolitif et oscillation autour de la position d'équilibre, exploiter un résultat numérique pour montrer le non isochronisme des oscillations de grande amplitude.

**Tableau des analogies entre mouvement de translation rectiligne et mouvement de rotation autour d'un axe fixe.**

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
$z$ direction du mouvement	$z$ axe de rotation
Position $z$ Vitesse $\dot{z}$	Angle $\theta$ Vitesse angulaire $\dot{\theta}$
Masse $m$ Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie $J$ Moment cinétique $L_z = J\dot{\theta}$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Loi de la quantité de mouvement : $\frac{dp_z}{dt} = m\ddot{z} = \sum F_{i,z}$	Loi du moment cinétique scalaire : $\frac{dL_z}{dt} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{z,i}$
Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z \dot{z}$ Travail $W = \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$ Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$	Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z \dot{\theta}$ Travail $W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z d\theta$ Énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$
Loi de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(F_i)$ ↪ même équation que le PFD	Loi de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ ↪ même équation que le TMC
Loi intégrale de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \sum_i W(F_i)$	Loi intégrale de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} J \dot{\theta}_B^2 - \frac{1}{2} J \dot{\theta}_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$

**Exercice 1 : Mouvement d'un solide.**

On considère un avion au décollage, et on distingue alors deux éléments : le corps de l'avion et une roue de rayon R en contact avec la piste. Cet avion accélère de façon uniforme le long de la piste rectiligne.

1. Préciser la nature du mouvement du fuselage dans le référentiel terrestre.
2. Préciser la nature du mouvement de la roue dans le référentiel lié au corps de l'avion.

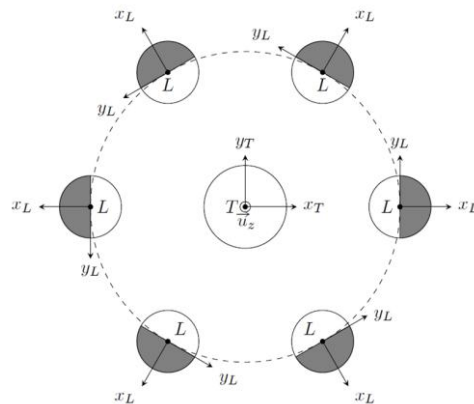
Soit  $v$  la norme de la vitesse de l'avion à un instant  $t$  dans le référentiel terrestre et  $\omega$  la vitesse de rotation de la roue à ce même instant.

3. Déterminer la relation entre  $v$ ,  $\omega$  et R si on suppose que la roue ne patine pas sur la piste.

**Exercice 2 : Mouvement de la lune.**

Le référentiel géocentrique est défini par son origine au centre de la Terre  $T$  et par trois directions fixes pointant vers trois étoiles suffisamment éloignées pour qu'on puisse avec une bonne approximation les considérer fixes. Dans ce référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jours. La distance entre le centre de la Terre et le centre de la Lune est environ égale à  $D = 3,8 \cdot 10^5$  km.

1. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel géocentrique, en distinguant notamment s'il s'agit d'un mouvement de translation circulaire ou d'un mouvement de rotation.
2. En déduire la vitesse angulaire  $\Omega = \dot{\theta}$  du centre de la Lune sur sa trajectoire.
3. Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.
4. Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel sélénocentrique, qui a les mêmes axes de référence que le référentiel géocentrique mais qui suit le centre de la Lune.
5. Déterminer la vitesse angulaire  $\Omega_P$  de rotation propre de la Lune, c'est-à-dire de la rotation de la Lune sur elle-même.



Mouvement de la lune dans le référentiel géocentrique. La face cachée de la lune est grisée.

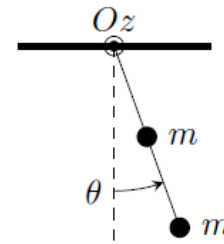
**Exercice 3 : entre le pendule simple et le pendule pesant, le pendule lesté.**

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur  $L$  sur laquelle sont fixées deux plombs de dimension négligeable et de même masse  $m$  respectivement à une distance  $L/2$  et une distance  $L$  du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

1. Montrer que l'équation du mouvement de ce système s'écrit :

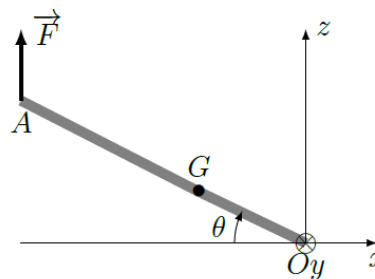
$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L} \sin \theta = 0$$

2. Montrer que le centre de masse  $G$  du système se trouve à la distance  $3L/4$  de l'axe.
3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique ou la loi de la quantité de mouvement à un point matériel de masse  $2m$  situé au centre de masse  $G$ ?



**Exercice 4 : monter un mur.**

On utilise une grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale. Le mur est initialement posé sur le sol ( $\theta=0$ ). La grue le soulève en exerçant une force toujours verticale appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe (Oy) fixe. Le mur est de hauteur  $H=OA=3,0$  m, de masse  $m=5,0 \cdot 10^3$  kg et son centre de masse  $G$  se situe à  $OG=a=1,2$  m de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe (Oy) est  $J=2,8 \cdot 10^3$  kg·m<sup>2</sup>.



On néglige tous les frottements.

1. Faire un bilan des actions mécaniques exercées sur le mur.
2. Appliquer la loi du moment cinétique au mur par rapport à l'axe (Oy). En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .

Le mur pivote autour de sa base (Oy) avec une vitesse angulaire constante  $\omega_0=0,20$  rad·s<sup>-1</sup>.

3. Déterminer et calculer la norme de la force exercée par la grue.
4. Exprimer la puissance  $P$  de la force puis le travail  $W$  effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. Calculer  $W$ .

**Exercice 5 : Mesure de la constante de gravitation universelle.**

En 1798, le britannique Henry Cavendish a réalisé une expérience dans le but de déterminer la masse de la terre. Pour cela, il a cherché à déterminer la constante de gravitation universelle  $G$ .

On considère un fléau composé de deux sphères de masse  $m=50$ g reliées par une tige de masse négligeable et de longueur  $2l=20$  cm, relié à un bâti fixe par un fil de torsion de constante  $C=5,0 \cdot 10^{-7}$  N·m·rad<sup>-1</sup>.

Pour la mesure, on approche d'abord dans la configuration 1 deux sphères de masse  $M=30$  kg, à l'équilibre le pendule a tourné d'un angle  $\alpha=1,75 \cdot 10^{-3}$  rad et la distance  $d=15$  cm, puis on approche les deux sphères dans la configuration 2, à l'équilibre le pendule a tourné d'un angle  $-\alpha$  pour une même distance (petite sphère-grande sphère).

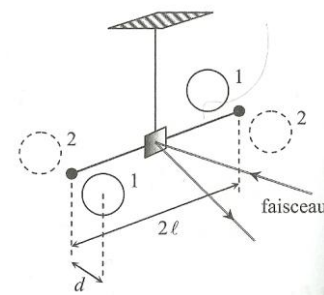
On montre que pour deux sphères de masse  $m_1$  et  $m_2$  et dont les centres sont distants de  $r$  la force d'attraction gravitationnelle est de norme :

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Les angles étant très faibles, on pourra considérer en

première approximation que la droite d'action de la force de gravitation est perpendiculaire à la droite directrice du fléau.

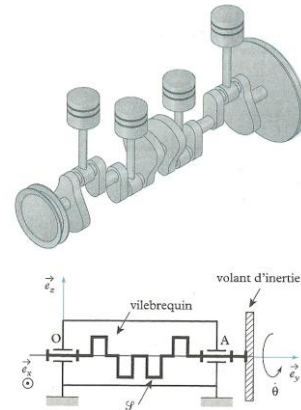
1. Effectuer un bilan des moments dynamiques s'exerçant sur le fléau dans les positions 1 et 2.
2. Déterminer alors l'expression de la constante de gravitation universelle en fonction des données de l'expérience et faire l'application numérique.
3. En déduire la valeur de la masse de la terre.



**Exercice 6 : Volant d'inertie.**

On étudie le mouvement d'un solide S, constitué d'un vilebrequin de masse  $m_1$  de moment d'inertie  $I_1 = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , par rapport à l'axe de rotation (Oy) et d'un volant d'inertie de masse  $m_2$  et de moment d'inertie  $I_2$  par rapport à ce même axe. L'ensemble du solide est dit équilibré par rapport à l'axe (Oy) c'est-à-dire que son centre de masse est situé sur l'axe de rotation (Oy).

On suppose que la liaison pivot entre le solide et le bâti est parfaite, les pistons exercent sur le solide un couple moteur  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$  avec  $\Gamma = -\lambda \dot{\theta}_0^2 \sin(2\theta)$  avec  $\lambda = 1,50 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  (homogène à un moment d'inertie) et  $\dot{\theta}_0$  une constante dont on va étudier la signification en cours d'exercice. Dans les calculs, on fera l'hypothèse  $\lambda \ll (I_1 + I_2)$ .



1. Etablir l'équation du mouvement du solide S.
2. Déterminer alors l'expression de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  sachant que la vitesse angulaire prend la valeur  $\dot{\theta}_0$  pour  $\theta = \pi/4$ . Que représente en fait  $\dot{\theta}_0$  ?
3. Déterminer l'expression du coefficient de régularité défini par :  $k = \frac{\dot{\theta}_{\max} - \dot{\theta}_{\min}}{\dot{\theta}_0}$  en fonction de  $\lambda$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .
4. Déterminer la masse  $m_2$  du volant d'inertie de rayon  $R = 12,5 \text{ cm}$  à installer pour obtenir un coefficient de régularité de  $2,00 \cdot 10^{-2}$ . On rappelle que pour un cylindre de rayon R et de masse m  $I = \frac{1}{2} mR^2$ .

**Exercice 7 : olé !!**

Maria est danseuse de salsa. Lors des tours en pivot, elle tourne autour de son axe (Gz) vertical en donnant une impulsion à l'aide de son pied gauche, l'appui se faisant sur son pied droit. La position de ses bras lui permet de modifier sa vitesse de rotation  $\omega$ . On note G son centre d'inertie.

L'appui au sol s'accompagne d'un couple de frottement de moment  $C_f$  par rapport à l'axe (Gz) que nous supposons constant. Nous négligeons tout frottement fluide.

L'impulsion donne à Maria une vitesse angulaire initiale  $\omega_0 = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ses bras sont tendus de sorte que son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation (Gz) est  $J_1 = 2,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Elle réalise alors juste un tour avant de s'arrêter.

1. Déterminer l'expression et la valeur numérique du couple  $C_f$ .
2. Exprimer et évaluer l'énergie dissipée par les frottements au cours de son tour ?

Maria prend maintenant la même impulsion lui conférant la vitesse angulaire  $\omega_0$  puis replie presque instantanément ses bras de sorte que son moment d'inertie par rapport à (Gz) devient  $J_2 = 0,80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

3. Quelle vitesse angulaire  $\omega_0'$  possède Maria après avoir replié ses bras ? Combien de tours réalise-t-elle alors avant de s'arrêter ?

**Exercice 8 : Etude d'une poulie.**

Un solide de masse  $m = 5 \text{ kg}$  est suspendu à l'extrémité d'une corde (supposée de masse négligeable) sur une poulie de masse  $m_p = 1,0 \text{ kg}$  et de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  en liaison pivot idéale par rapport à un bâti fixe dans le référentiel R. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation s'exprime  $I = \frac{1}{2} m_p R^2$ .

1. **Cinématique :** Déterminer le lien entre  $\dot{x}$  la vitesse de translation du solide le long de l'axe Ax et  $\dot{\theta}$  la vitesse de rotation de la poulie.
2. **Statique :** La poulie est retenue par un opérateur. Où ce dernier a-t-il le plus intérêt à appliquer sa force et dans quelle direction ? Quelle est la force minimale qu'il doit appliquer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
3. **Dynamique :** A l'instant initial, l'opérateur libère le système sans vitesse de rotation. Déterminer l'accélération linéaire du solide, l'accélération angulaire de la poulie et la tension de la corde.

