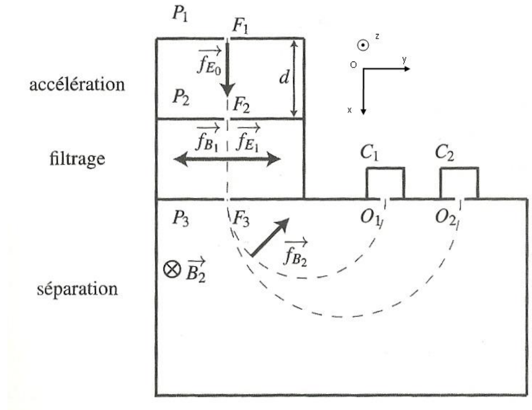
Problème 1 : Spectromètre de masse.

a. <u>Accélération des ions.</u>



1. Pour accélérer l'ion de charge q>0, de la plaque P_1 à la plaque P_2, il faut que $\vec{E}_O$ soit orienté dans le sens $P_1 \rightarrow P_2$.

Pour exprimer la norme de E_O, on utilise la relation : $U = V_1 - V_2 = \int_{P_1 \to P_2} \vec{E}_O . d\vec{l} = \int_0^d E_O . dx = E_O d$

On en conclut que U est positive.
Et on obtient alors :

$\boxed{\vec{E}_O = \frac{U}{d}\vec{e}_x}$ A.N : $\boxed{E_O = 1{,}00.10^4 V.m^{-1}}$.

2. On applique la conservation de l'énergie mécanique entre les deux états suivants pour l'ion : Arrêt en F_1, passage en F_2 à la vitesse v_O.

$\frac{1}{2}mv_O^2 + qV_2 = qV_1$ d'où $\boxed{v_O = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$ A.N : $\boxed{v_{O;200} = 1{,}384.10^5 m.s^{-1}}$ et $\boxed{v_{O;202} = 1{,}377.10^5 m.s^{-1}}$

Les vitesses atteintes restent inférieures à $c/10^3$, la mécanique classique fournit une bonne évaluation.

b. <u>Filtrage en fonction de la vitesse.</u>

3. Dans l'espace de filtrage, l'ion est soumis à la force de Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E}_1 + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_1\right)$.
4. Pour que l'ion suive une trajectoire rectiligne uniforme dans l'espace de filtrage, il faut que la force de Lorentz sur l'ion soit nulle c'est-à-dire : $\boxed{\vec{E}_1 + \vec{v}_O \wedge \vec{B}_1 = \vec{0}}$
5. On en déduit alors par projection sur l'axe de même direction et sens que $\vec{E}_1$ la relation : $\boxed{v_O = \frac{E_1}{B_1}}$

A.N : $\boxed{v_O = 1{,}384.10^5 m.s^{-1}}$ L'isotope sélectionné avec les valeurs de champs indiqués est alors $^{200}Hg^{2+}$.

c. <u>Séparation et comptage des ions.</u>

6. La force de Lorentz s'exerçant sur les ions dans la zone de séparation est $\vec{F} = q\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_2\right)$. Le travail de cette force est alors $\vec{F}.\vec{v}_{M/R} = q\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_2\right)\vec{v}_{M/R} = 0$. La composante magnétique de la force de Lorentz présente un travail nul, l'énergie cinétique est donc conservée et la norme de la vitesse de l'ion est constante au cours du mouvement.
7. La seconde loi de Newton appliquée à l'ion s'exprime : $m\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \vec{F} = q\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_2\right)$

En projection dans le repère $(F_3, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on obtient alors : $\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = -qB_2\dot{y} \\ m\ddot{y} = qB_2\dot{x} \end{cases}}$ avec $\vec{B}_2 = -B_2\vec{e}_z$

8. On pose $\underline{u} = x + jy$ qui vérifie alors l'équation : $\ddot{\underline{u}} - j\omega_C \dot{\underline{u}} = 0$ avec $\omega_C = \frac{qB_2}{m}$

La solution générale de cette équation est : $\underline{S}_H = \underline{S}_O \exp\left(j\omega_C t\right)$

Les conditions initiales donnent : $\dot{\underline{u}}(t=0) = \underline{S}_O = v_O$ d'où $\dot{\underline{u}}(t) = v_O \exp\left(j\omega_C t\right)$

On intègre cette expression en tenant compte des CI : $\underline{u}(t=0) = 0$ On obtient $\underline{u}(t) = \frac{v_O}{j\omega_C}\left(\exp\left(j\omega_C t\right) - 1\right)$

On détermine alors les coordonnées de l'ion : $\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{u}(t)\right) = \frac{v_O}{\omega_C}\sin\left(\omega_C t\right)}$ et $\boxed{y(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{u}(t)\right) = \frac{v_O}{\omega_C}\left(1 - \cos\left(\omega_C t\right)\right)}$

Pour la trajectoire, on note que : $x^2(t) + \left(y(t) - \frac{v_O}{\omega_C}\right)^2 = \left(\frac{v_O}{\omega_C}\right)^2$ il s'agit d'un cercle de rayon $\frac{v_O}{\omega_C}$ de centre $\left(0, \frac{v_O}{\omega_C}\right)$.

9. Les distances demandées sont exprimables par la relation : $F_3O_i = \frac{2v_O}{\omega_C} = \frac{2}{B_2}\sqrt{\frac{m_iU}{e}}$

Cette distance est croissante avec la masse de l'ion, on en déduit que $^{200}Hg^{2+}$ est récolté en C_1 et $\boxed{F_3O_1 = \frac{2}{B_2}\sqrt{\frac{200m_uU}{e}}}$ ainsi que $^{202}Hg^{2+}$ est récolté en C_2 et $\boxed{F_3O_2 = \frac{2}{B_2}\sqrt{\frac{202m_uU}{e}}}$

10. On peut alors exprimer la distance $\boxed{\delta = \frac{2}{B_2}\sqrt{\frac{m_u U}{e}}\left(\sqrt{202}-\sqrt{200}\right)}$ A.N : $\boxed{\delta = 7{,}2.10^{-3}m}$

La valeur de δ n'est pas très grande comparée aux distances F_3O_i de l'ordre de 1,45m mais suffisante pour réaliser la séparation sur deux détecteurs distincts si ceux-ci présentent une dimension de l'ordre du mm au cm.

11. Sur une minute, on récolte une quantité de charge Q_1 soit un nombre d'ions $^{200}Hg^{2+}$ $\boxed{N_1 = \frac{Q_1}{2e} = 3{,}75.10^{11}}$

De même, sur une minute, on récolte un nombre d'ions $^{202}Hg^{2+}$ $\boxed{N_2 = \frac{Q_2}{2e} = 1{,}09.10^{11}}$

12. La proportion d'isotope ^{200}Hg est donnée par $\boxed{p_1 = \frac{Q_1}{Q_1+Q_2} = 0{,}774}$ et celle en ^{202}Hg par $\boxed{p_1 = \frac{Q_2}{Q_1+Q_2} = 0{,}226}$.

13. La masse molaire du mercure est alors $\boxed{M = \left(200\,p_1 + 202\,p_2\right) = 200{,}5g.mol^{-1}}$

Problème 2 : A propos de la sonde Rosetta.

Questions préliminaires

1. La force gravitationnelle exercée par le soleil s'exprime $\boxed{\vec{F}_S(M) = -\frac{GmM_S}{r^2}\vec{u}}$.

2. Le travail élémentaire de la force s'exprime alors : $\delta W = \vec{F}_S.d\overrightarrow{OM} = -\frac{mGM_S}{r^2}dr = -d\left(-\frac{mGM_S}{r}\right)$

On met ainsi en évidence que la force de gravité est conservative associée à l'énergie potentielle : $\boxed{E_P(r) = -\frac{mGM_S}{r}}$ en prenant pour convention une énergie potentielle nulle à distance infinie.

3. On applique le théorème du moment cinétique en T pour le satellite dans le référentiel R_G supposé galiléen : $\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R_S} = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}_S = \vec{0}$

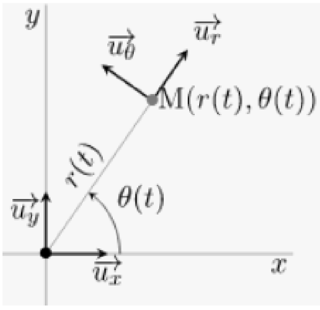
D'après les propriétés du produit vectoriel, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{L}_O$, **<u>M est donc astreint à se déplacer dans le plan normal à $\vec{L}_O$ et passant par O qui est unique. La trajectoire est plane.</u>**

En introduisant la constante des aires C et le vecteur unitaire $\vec{e}_Z$, le moment cinétique s'écrit : $\vec{L}_T = mC\vec{e}_Z$.

4. On introduit alors la base polaire (voir schéma ci-contre) dans laquelle :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \qquad \vec{v}_M = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_M = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$



5. La loi des aires découle de la conservation de la norme du moment cinétique.

On obtient en utilisant la cinématique : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}_M = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$ d'où $r^2\dot{\theta} = C$

D'autre part, l'aire élémentaire balayée par le vecteur position lors d'un déplacement élémentaire s'exprime : $dA = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM}\wedge d\overrightarrow{OM}\right\| = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ on obtient alors : $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}}$

<u>D'où la loi des aires : L'aire balayée par le vecteur position est la même si on considère deux intervalles de temps égaux au cours du déplacement de M.</u>

6. On exploite l'hypothèse d'un rayon constant égal à R_1 et on applique la 2nd loi de Newton :

$\left(\frac{d\vec{p}_M}{dt}\right)_{R_S} = M_T\vec{a}_M = \vec{F}_S$ qu'on projette sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ pour obtenir $\begin{cases} -R_1\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_S}{R_1^2} \\ R_1\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

On en déduit que la vitesse de rotation est constante et s'exprime $\boxed{\Omega_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1^3}}}$.

On exprime la période de rotation de la Terre $T = \dfrac{2\pi}{\Omega_T}$ d'où la troisième loi de Kepler : $\boxed{\dfrac{T^2}{R_1^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}}$

7. On écrit l'énergie mécanique : $E_M = E_C + E_P = \dfrac{1}{2}M_T\left(R_1\Omega_T\right)^2 - \dfrac{GM_TM_S}{R_1}$ d'où $\boxed{E_M = -\dfrac{GM_TM_S}{2R_1}}$
8. On exploite la troisième loi de Képler en utilisant la période de révolution sidérale de la Terre autour du soleil T=365,25jours ce qui donne $\boxed{R_1 = \sqrt[3]{\dfrac{GM_ST^2}{4\pi^2}} = 1,50.10^{11}m}$ correspondant bien à 1ua.

On déterminer alors numériquement $\boxed{v_T = R_1\Omega_T = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_1}} = 2,98.10^4 m.s^{-1}}$

9. La troisième loi de Kepler donne pour un satellite autour de la Terre $\boxed{\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$
10. Par définition, un satellite géostationnaire est constamment situé à la verticale au-dessus d'un même point de la planète Terre.

Si on suppose que le plan de la trajectoire n'est pas le plan de l'équateur, le satellite sera nécessairement au-dessus de points situés dans l'hémisphère Nord la moitié du temps et au-dessus de points situés dans l'hémisphère Sud l'autre moitié du temps. Il n'est donc pas toujours au-dessus du même point. On en conclut que le seul plan orbital possible pour un satellite géostationnaire est le plan équatorial.
Pour qu'il soit géostationnaire il faut que sa rotation soit synchrone de la Terre de période 24h.

Le rayon de la trajectoire géostationnaire est alors : $\boxed{R_{Geo} = \sqrt[3]{\dfrac{GM_TT^2}{4\pi^2}} = 4,22.10^7 m}$

Budget énergétique pour transfert orbital.

11. D'après la figure $\boxed{a = \dfrac{R_1 + R_2}{2}}$
12. Sur une trajectoire circulaire de rayon R_1 : $\boxed{E_{M,R_1} = -\dfrac{GmM_S}{2R_1}}$ par analogie $\boxed{E_{M,a} = -\dfrac{GmM_S}{R_1 + R_2}}$
13. Sur la trajectoire circulaire de rayon R_1 : $E_{M,R_1} = E_{C,R_1} + E_{P,R_1}$

avec $E_{M,R_1} = -\dfrac{GmM_S}{2R_1}$; $E_{P,R_1} = -\dfrac{GmM_S}{R_1}$ et $E_{C,R_1} = \dfrac{1}{2}mv_1^2$ d'où $v_1 = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_1}}$

Sur la trajectoire elliptique $E_{C,a} = \dfrac{1}{2}mv_e^2 = \dfrac{GmM_S}{R_1} - \dfrac{GmM_S}{R_1 + R_2}$ d'où $v_e^2 = \dfrac{2GM_S}{R_1} - \dfrac{2GM_S}{R_1 + R_2}$ et

$v_e = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_1}}\sqrt{2 - \dfrac{2R_1}{R_1 + R_2}} = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_1}}\sqrt{\dfrac{2R_2}{R_1 + R_2}}$ On en déduit bien $\boxed{\Delta v = v_e - v_1 = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_1}}\left(\sqrt{\dfrac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right)}$

14. On sait que a=3,5ua et R_1=1ua, on en déduit $\boxed{R_2 = 2a - R_1 = 6ua}$ puis $\boxed{\Delta v = 9,2.10^3 m.s^{-1}}$

Lien entre budget de vitesse et carburant.

15. On exploite l'équation différentielle proposée et on l'intègre entre un état initial où le système présente les caractéristiques (v_i, $m_i=m_O+\Delta m$) et un état final (v_f, $m_f=m_O$) avec Δm la masse de carburant utilisée et m_O la masse du système propulsé grâce à la combustion de ce carburant ce qui donne :

$\displaystyle\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{v_e}\frac{dv}{dt} = \int_{t_i}^{t_f} -\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$ puis $\dfrac{1}{v_e}\left(v_f - v_i\right) = -\ln\left(\dfrac{m_f}{m_i}\right)$ ce qui donne bien $\boxed{\Delta v = v_e \ln\left(1 + \dfrac{\Delta m}{m_O}\right)}$

16. On obtient directement : $\boxed{r = \exp\left(\dfrac{\Delta v}{v_e}\right) - 1}$
17. L'évaluation numérique donne $\boxed{v_e = 3,0.10^3 m.s^{-1}}$
18. Pour réaliser directement l'injection, il faut produite une variation de vitesse Δv=9,2km.s^{-1} ce qui correspond sur la courbe de la figure 2. à un coefficient r=12,5 et une masse totale embarquée $\boxed{m_O + \Delta m = (r+1)m_O = 1,75.10^4 kg}$

Cette masse est égale à 2,5 fois la charge utile embarquable dans ariane 5, l'injection directe est impossible.

19. L'énergie mécanique du système dans le référentiel géocentrique est conservée, ce qui donne le bilan suivant entre l'état 1 ($r \to \infty$, v_1) à l'état 2 ($r \to \infty$, v_2) :

$E_{m1} = E_{m2}$ soit $\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$ et finalement $\boxed{v_1 = v_2}$.

20. La vitesse dans R_S d'un point immobile dans R_T est donné par $\vec{v}_T$, pour un point animé d'une vitesse $\vec{v}_1$ dans R_T, la vitesse dans R_S sera $\boxed{\vec{v}_{1,S} = \vec{v}_T + \vec{v}_1}$ et de même $\boxed{\vec{v}_{2,S} = \vec{v}_T + \vec{v}_2}$

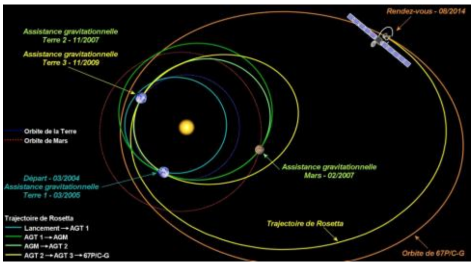
On obtient alors $\vec{v}_{1,S} = v_T.\vec{e}_y + v.\vec{e}_x$ d'où $\boxed{v_{1,S} = \sqrt{v_T^2 + v^2}}$

et $\vec{v}_{2,S} = v_T.\vec{e}_y + v\cos\theta.\vec{e}_x + v\sin\theta.\vec{e}_y$ d'où $\boxed{v_{2,S} = \sqrt{v_T^2 + v^2 + 2v_T v\sin\theta}}$

Finalement $\boxed{\Delta v = \sqrt{v_T^2 + v^2 + 2v_T v\sin\theta} - \sqrt{v_T^2 + v^2}}$

21. On obtient $\boxed{\Delta v = \sqrt{v_T^2 + v^2 + 2v_T v\sin\theta} - \sqrt{v_T^2 + v^2}}$ A.N : $\boxed{\Delta v = 3,3.km.s^{-1}}$

22. On observe que sur les 9,2km.s^{-1} nécessaire pour atteindre la trajectoire de la comète, 3,3km.s^{-1} sont obtenue par une simple assistance gravitationnelle sans qu'aucun carburant soit nécessaire. En revanche pour obtenir cet effet d'assistance gravitationnel, il faut que la trajectoire de la sonde soit synchronisée sur la trajectoire des planètes utilisées (Terre, Mars et deux fois Terre pour Rosetta ce qui entraina une trajectoire de Rosetta qui est composée de trois rotations autour du Soleil) ce qui demande plusieurs années de voyage.



23. On obtient le polynome suivant en exploitant la relation donnée dans l'énoncé : $R^2 + 2\alpha R - \frac{\alpha^2}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 0$, on en déduit le discriminant $4\alpha^2\left(1 + \frac{1}{\tan^2\left(\theta/2\right)}\right) = \frac{4\alpha^2}{\sin^2\left(\theta/2\right)}$ et les

racines $r_\pm = \alpha\left(\pm\frac{1}{\sin\left(\theta/2\right)} - 1\right)$ et puisque R est positif on obtient : $\boxed{R = \alpha\left(\frac{1}{\sin\left(\theta/2\right)} - 1\right)}$

L'application numérique donne $\boxed{R = 2,6.10^4 km}$ ce qui donne $\boxed{R \approx 4R_T \approx 0,6R_{Géo}}$

La trajectoire n'entre pas en collision avec la Terre (ouf) mais sa distance d'approche minimale est tout de même nettement inférieure au rayon des satellites géostationnaires ce qui demanderait de prendre des précautions.

Résolution de problème : Télésiège du Châtelet au Grand Bornand.

1. On effectue un bilan d'énergie mécanique en régime permanent pour le télésiège entre deux états :

Etat 1 : (Télésiège complet à l'instant t)+(nombre de skieur en 1h pris immobiles en bas de la piste)

Etat 2 : (Télésiège complet à l'instant t+1h)+(nombre de skieur en 1h animés d'une vitesse v_O en haut de la piste).

- Pour le télésiège, le régime permanent nous assure

(Télésiège complet à l'instant t)= (Télésiège complet à l'instant t+1h) et donc que
E_M(télésiège à t) = E_M(télésiège à t+1h)

- Pour les passagers, il y a N_{1h}=2250 personnes par heure qui montent :

$E_{M,I} = E_{C,bas} + E_{P,\vec{g},bas} = 0$ car ils sont animés d'une vitesse initiale nulle et à une altitude prise comme référence d'énergie potentielle gravitationnelle.

$E_{M,F} = E_{C,haut} + E_{P,\vec{g},haut} = N_{1h}\left(\frac{1}{2}mv_O^2 + mgh\right)$ car ils sont animés d'une vitesse finale v_O et à une altitude h correspondant au dénivelé au-dessus du point de départ, ils font en moyenne une masse m=75kg.

Un théorème de l'énergie cinétique sur une heure de fonctionnement donne alors :

$E_{M,F} - E_{M,I} = P_{moteur}.\Delta t$ on en déduit que $P_{moteur} = \frac{N_{1h}m}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}v_O^2 + gh\right)$ A.N : $P_{moteur} = 1,3.10^5 W$

La puissance donnée est de 2,25.10^{5}W ce qui semble cohérent en considérant qu'on s'est placé dans une situation idéale sans frottement. De plus, il semble raisonnable de ne pas faire fonctionner le moteur à puissance maximale mais à une valeur de fonctionnement raisonnablement inférieure.

2. On reprend l'expression de l'énergie mécanique mais pour une situation générale.

On suppose que tous les points du télésiège sont animés de la vitesse linéaire v(t) : $E_C(t)=\frac{1}{2}m_{totale}v^2$

En supposant que le télésiège est chargé au maximum, donc avec 4 passagers sur tous les sièges en phase montante soit la moitié des sièges : $m_{totale}=m_{système}+4*\frac{n_{siège}}{2}m$ où m est toujours la masse moyenne d'un passager.

L'énergie potentielle du télésiège s'exprime : $E_P(t)=E_P(système)+4\sum_{i=1}^{n_{siège}/2}mgz_i$

Le théorème de la puissance cinétique donne alors la loi d'évolution : $\frac{dE_M}{dt}(t)=P$ où P est la puissance fournie par les moteurs, ce qui donne : $\frac{dE_M}{dt}(t)=\frac{dE_C}{dt}(t)+\frac{dE_P}{dt}(t)=m_{total}v\frac{dv}{dt}+\frac{d}{dt}\left(4\sum_{i=1}^{n_{siège}/2}mgz_i\right)$

Pour le dernier terme on obtient : $\frac{dE_P}{dt}(t)=\left(4mg\sum_{i=1}^{n_{siège}/2}\frac{dz_i}{dt}\right)$ où $\left(\sum_{i=1}^{n_{siège}/2}\frac{dz_i}{dt}\right)$ est la vitesse moyenne d'ascension des passagers, ce qui donne avec la pente moyenne p=0,3 $\left(\sum_{i=1}^{n_{siège}/2}\frac{dz_i}{dt}\right)=\frac{n_{siège}}{2}pv$

Finalement l'équation dévolution de l'énergie mécanique s'écrit : $m_{total}v\frac{dv}{dt}+2mgn_{siège}pv=P$

Ce qui donne : $v\frac{dv}{dt}=\frac{P-2mgn_{siège}pv}{m_{total}}$ qui n'est pas une équation très sympatique…

Evaluons les ordres de grandes à droite : $P=2,25.10^5W$ et $2mgn_{siège}pv_O\approx10^4W$ soit 5% (dans le pire des cas) de la puissance fournie par le moteur. On va tout simplement négligé ce terme pour obtenir un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

L'équation devient alors : $v\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\frac{P}{m_{total}}$ donc $\left(\frac{v^2}{2}\right)(t)=\frac{P}{m_{total}}t$ d'où $\left(\frac{v_O^2}{2}\right)=\frac{P}{m_{total}}\tau$ où τ est l'instant où le télésiège atteint sa vitesse nominale.

Finalement : $\tau=\left(\frac{m_{total}v_O^2}{2P}\right)$ ce qui donne : $\tau=0,25s$ si on suppose que la masse du système est négligeable devant la masse des passages embarqués.

Cette valeur donne probablement un ordre de grandeur correcte, mais elle est clairement sous estimée à cause des deux hypothèses faites : $m_{système}$ est probablement non négligeable devant $m_{passagers}$, même si c'est difficile de l'évaluer ab nihilo ; on a négligé l'influence de la variation d'énergie potentielle dans notre estimation.