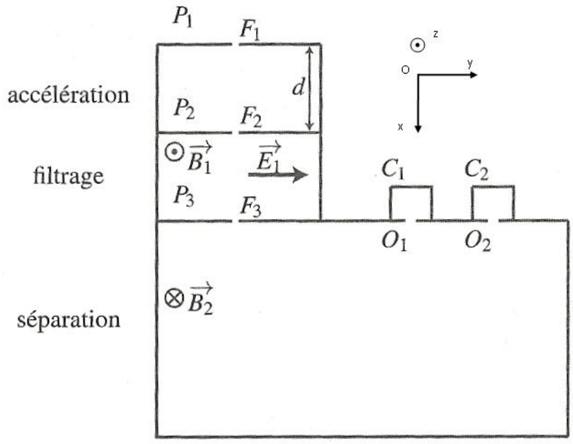
Problème 1 : Spectromètre de masse.

Le spectromètre de masse permet de mesurer la masse des particules chargées avec une telle précision qu'il peut servir à déterminer des compositions isotopiques d'éléments chimiques. Dans ce problème, on va prendre comme exemple d'application le cas de l'élément mercure Hg.

Données :
d = 1,00 m ; U = 1,00.10^{4} V ; e = 1,60.10^{-19} C ;
m_u = 1,67.10^{-27} kg (masse d'un nucléon) ;
E_1 = 5,30.10^{4} V.m^{-1} ; B_1 = 0,383 T
B_2 = 0,200 T. N_A = 6,02.10^{23} mol^{-1}



a. Accélération des ions.

On considère qu'un ion de masse m et de charge q>0 est émis par la source située en F_1, avec une vitesse initiale négligeable, il est alors accéléré par une différence de potentiel U appliquée entre les plaques conductrices P_1 et P_2.

1. Préciser le signe de la tension U pour que l'ion soit accéléré dans le bon sens, représenter sur le schéma de l'appareil le champ électrostatique accélérateur $\vec{E}_O$ et établir son expression en fonction de U et d. Effectuer l'application numérique pour la norme du champ électrostatique.
2. Exprimer la vitesse v_O de l'ion lorsqu'il passe au niveau de la plaque P_2 en fonction de q, m et U. Effectuer l'application numérique pour les ions $^{200}Hg^{2+}$ et $^{202}Hg^{2+}$ (On donnera 4 chiffres significatifs).

Commenter les valeurs des vitesses atteintes en sortie d'accélérateur.

b. Filtrage en fonction de la vitesse.

En pratique, les ions ne présentent pas une vitesse parfaitement négligeable en F_1 ce qui entraine une dispersion des vitesses des ions au niveau de F_2, pour résoudre ce problème on réalise une opération de filtrage pour améliorer la précision du spectromètre.

Dans l'espace de filtrage entre les plaques P_2 et P_3, on établit un champ électrostatique $\vec{E}_1$ uniforme et un champ magnétostatique $\vec{B}_1$ uniforme (voir schéma).

3. Exprimer la force s'exerçant sur l'ion dans l'espace de filtrage.
4. Déterminer une condition pour que l'ion suive une trajectoire rectiligne uniforme dans l'espace de filtrage.
5. Etablir l'expression de la vitesse des ions qui parviennent en F_3 en fonction de E_1 et B_1. Faire l'application numérique avec les données fournies et en déduire quel isotope du mercure parvient en F_3.

c. Séparation et comptage des ions.

Pour établir la composition isotopique du mercure, on règle en fait la valeur de E_1 pour assurer le passage des ions $^{200}Hg^{2+}$ pendant une minute à travers la fente F_3 puis on la modifie pour assurer le passage des ions $^{202}Hg^{2+}$ pendant une minute en maintenant B_1 constant.

Après F_3 les ions pénètrent dans une région où ne règne qu'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_2$ afin de les dévier vers les collecteurs C_1 et C_2.

6. Montrer que la vitesse des ions dans cette région reste constante au cours du mouvement.
7. Etablir le système d'équations couplées vérifiées lors du mouvement de l'électron
8. Résoudre ce système pour établir les expressions des coordonnées de l'ion par rapport au point F_3. En déduire la nature de la trajectoire.
9. Déterminer les distances F_3O_1 et F_3O_2 en fonction de m_u, U, e et B_2 et préciser quel isotope est récolté par C_1 puis par C_2.
10. Exprimer la distance δ entre O_1 et O_2. Faire l'application numérique et commenter la faisabilité de la séparation sur deux détecteurs distincts.

Sur la minute de mesure, le détecteur C_1 collecte une charge Q_1 = 1,20.10^{-7}C et Q_2 = 3,5.10^{-8}C.

11. Estimez numériquement les nombres N_1 et N_2 de particules collectées.
12. Exprimer la composition isotopique du mercure en fonction de Q_1 et Q_2.
13. En attribuant à chaque nucléon une masse molaire de 1g.mol^{-1}, en déduire la masse molaire du mercure naturel et faire l'application numérique en g.mol^{-1}.

Problème 2 : A propos de la sonde Rosetta.

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guerassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Apres un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en aout 2014 pour une période d'observation de 18 mois.


Image de Rosetta (ESA/ATG medialab)

Grandeurs physiques :
Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0\ 10^{30}$ kg Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0\ 10^{24}$ kg
Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) = $1{,}50.10^8$ km
Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4\ 10^3$ km Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$
Données techniques relatives à Rosetta :
Masse à vide de Rosetta : $1{,}30\ .10^3$ kg Charge utile du lanceur Ariane 5G+ : $6{,}95\ 10^3$ kg

Questions préliminaires
On considère le Soleil comme centre attractif gravitationnel situé en O pris comme origine du référentiel héliocentrique R_S supposé galiléen.

1. Donner l'expression de $\vec{F}_S(M)$ la force gravitationnelle exercée par le soleil sur un objet ponctuel de masse m situé au point M, à une distance r du soleil en fonction de G, M_s, m, r et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$.
2. Montrer que cette force est conservative et dérive d'une énergie potentiel $E_{P,S}(r)$ à exprimer en fonction de G, M_S, m et r.
3. Montrer la conservation de $\vec{L}_O(M)$ moment cinétique en O pour le point matériel M, en déduire la planéité du mouvement. Donner alors une expression de ce moment cinétique en introduisant la constante des aires C et un vecteur unitaire qu'on appellera $\vec{e}_z$.
4. Introduire alors à l'aide d'un schéma la base de projection adaptée à l'étude du mouvement plan du point matériel et exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans cette base.
5. Démontrer la loi des aires.

On étudie d'abord le mouvement de la Terre T de masse M_T, dont on suppose en première approximation qu'elle présente une trajectoire circulaire de rayon R_1.

6. Déterminer par une étude mécanique l'expression de Ω_T la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil en fonction de G, M_S et R_1. En déduire la troisième loi de Kepler.
7. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la Terre en fonction de G, M_S, M_T et R_1.
8. A partir des données en début d'énoncé, vérifier la valeur fournie pour une unité astronomique et évaluer numériquement la vitesse v_T de la Terre le long de sa trajectoire circulaire.
9. Réécrire la loi de Kepler pour un satellite autour de la Terre.
10. Définir un satellite géostationnaire. Indiquer alors le plan dans lequel la trajectoire du satellite doit se situer et déterminer le rayon de sa trajectoire circulaire autour de la Terre. Faire l'A.N.

Budget énergétique pour transfert orbital.
Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite de transfert elliptique appelée aussi orbite de transfert de Hohmann.
Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 (voir figure 1) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2, permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.
On envisage de réaliser la transition d'une orbite circulaire à l'autre pour une sonde de masse m.

11. Déduire de la figure l'expression du demi grand axe a en fonction de R_1 et R_2.
12. Rappeler l'énergie mécanique de la sonde (de masse m) sur la trajectorie circulaire de rayon R_1. En exploitant une analogie à préciser, donner l'expression de l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite de transfert en fonction de G, M_S, m, R_1 et R_2.
13. Montrer que la variation de vitesse à fournir pour passer de l'orbite « basse » de rayon R_1 à l'orbite de Hohmann s'exprime sous la forme $\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}-1\right)$

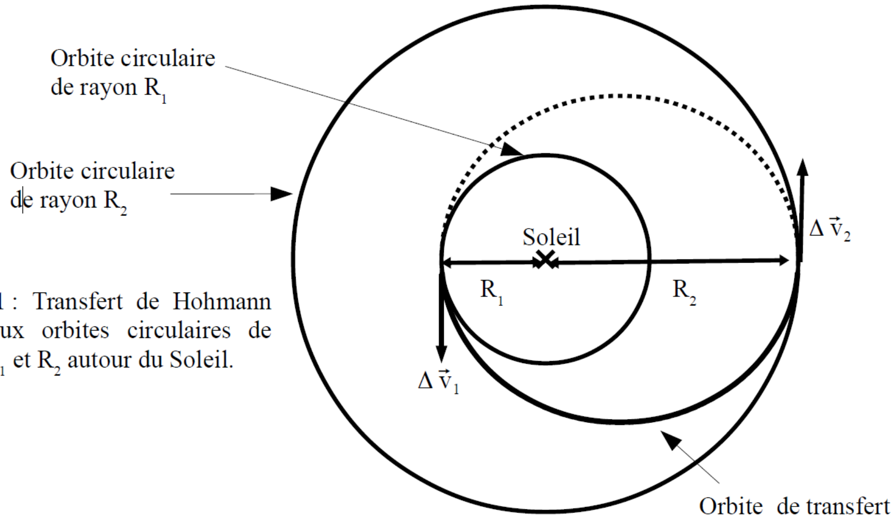


Figure 1 : Transfert de Hohmann entre deux orbites circulaires de rayons R_1 et R_2 autour du Soleil.

La comète 67P/TG possède déjà une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est proche de a=3,5ua et dont le périhélie est proche de R_1=1ua. Puisque la Terre possède une orbite quasi circulaire de rayon 1ua, On suppose qu'on peut directement injecter la sonde de l'orbite circulaire de rayon R_1 à l'orbite de la comète en lui fournissant la seule impulsion Δv_1 précédente lorsqu'elle passe au voisinage de la Terre.

14. Déduire de la description faite la valeur numérique de R_2 (en ua) et évaluer numériquement le « budget de vitesse » Δv_1 à fournir pour effectuer ce transfert.

Le budget Δv permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à un budget Δv_i, le budget total Δv correspond à la somme de ces dernières.
On prendra pour la suite du problème une valeur de Δv pour rejoindre la comète 67P/TG de 9,2 $km \cdot s^{-1}$.

Lien entre budget et carburant.
La propulsion de Rosetta est assurée par 24 petits moteur-fusées à ergols liquides. Les moteurs permettent d'effectuer les corrections orbitales au cours du long périple de la sonde afin de placer celle-ci en orbite autour de la comète. Nous cherchons à estimer la masse d'ergols nécessaire à la réalisation de la mission.
L'éjection de gaz par les tuyères des propulseurs permet de modifier la vitesse de la sonde. On considère un mouvement rectiligne de la sonde. L'équation du mouvement de la sonde propulsée par éjection du gaz est donnée par : $m\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dm}{dt}v_e$ où v_e est la vitesse d'éjection des gaz.

15. En considérant que la vitesse d'éjection est constante, montrer que la variation de vitesse Δv est exprimée par : $\Delta v = v_e \ln\left(1+\dfrac{\Delta m}{m_O}\right)$ où Δm est la masse de carburant utilisée pour produire la variation de vitesse Δv et m_O la masse du système propulsé.

Cette relation est appelée équation de Tsiolkovski. Elle relie l'accroissement de vitesse au cours d'une phase de propulsion d'un objet (sonde, fusée ...) doté d'un moteur à réaction au rapport de sa masse initiale à sa masse finale.

16. La quantité de carburant nécessaire à une mission est souvent quantifiée par le paramètre r défini par la relation : $r = \dfrac{masse \quad de \quad carburant}{masse \quad véhicule \quad vide}$. Déterminer l'expression de r en fonction de v_e et Δv.

L'ergol utilisé dans la propulsion présente une masse molaire M=30g.mol^{-1}, une capacité molaire C_{pm}=33J.mol^{-1}.K^{-1} et une température de combustion T_{Comb}=4,0.10^{3}K. On montre alors que la vitesse d'éjection des gaz s'écrit $v_e = \sqrt{\dfrac{2C_{pm}T_{comb}}{M}}$

17. Evaluer numériquement v_e.

A partir des résultats précédents, on a tracé sur la figure 2 l'évolution de la valeur du coefficient r en fonction de Δv.

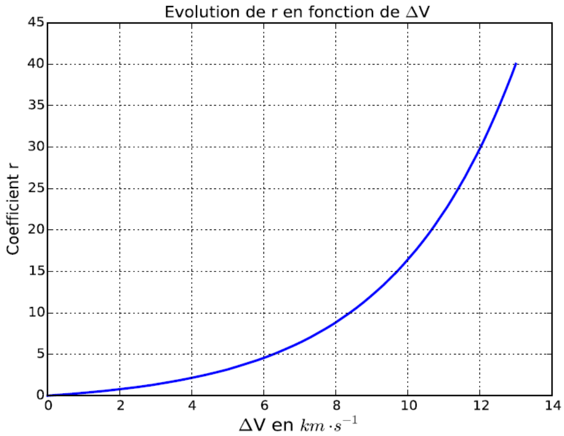


Figure 2.

18. Evaluer la masse totale à embarquer si on veut effectuer l'injection directe de Rosetta sur l'orbite de la comète. Montrer alors que cette stratégie n'est pas envisageable.

Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée d'ergols, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation d'ergols. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue...

Rosetta a utilisé trois assistances gravitationnelles en passant à proximité de la Terre. On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique R_T supposé galiléen. La sonde arrive de l'infini (c'est à dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse $\vec{v}_1$ dans le référentiel R_T. La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique $\vec{v}_2$ (voir la figure 3).

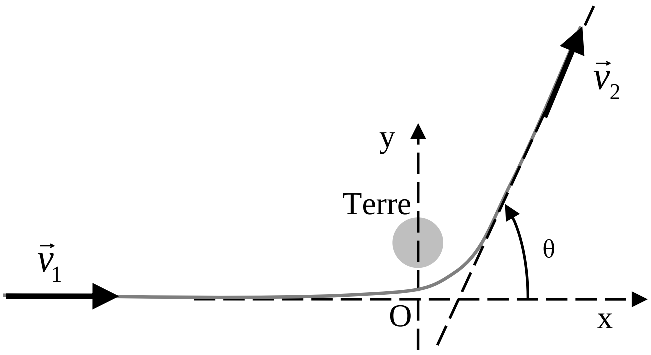


Figure 3.

19. Montrer que la norme de la vitesse est la même à l'arrivée et à la sortie. On notera alors $v = \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\|$

On suppose que $\vec{v}_T = v_T \vec{e}_y$ la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique R_S est dirigée dans la direction et le sens de l'axe (Oy).

20. Exprimer les vitesses $\vec{v}_{1,S}$ et $\vec{v}_{2,S}$ de la sonde dans le référentiel héliocentrique en fonction de $\vec{v}_T$, $\vec{v}_1$, et $\vec{v}_2$. En déduire leur norme $v_{1,S}$ et $v_{2,S}$ en fonction de v_T, v et θ .
21. Evaluer numériquement le budget de vitesse gagné par une assistance gravitationnelle en prenant $v=5 km.s^{-1}$, θ=45° et la valeur de v_T obtenue à la question 9.
22. Commenter le résultat obtenu. Indiquer pourquoi l'assistance gravitationnelle augmente la durée du voyage vers la comète cible par rapport à une trajectoire directe ?

Il reste à vérifier que cette assistance gravitationnelle est réalisable. Pour cela, on donne la relation liant l'angle de déviation θ à R la distance minimale d'approche de la Terre $\tan\left(\theta/2\right) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{R(R+2\alpha)}}$ avec $\alpha = \dfrac{GM_T}{v^2}$

23. Déterminer le polynôme dont R est une des racines. En déduire son expression en fonction de α et $\sin\left(\theta/2\right)$. Faire l'application numérique et commenter.

Résolution de problème : Télésiège du Châtelet au Grand Bornand.

Rappel des compétences associées à la résolution de problème :

- **S'approprier le problème (**faire un schéma, identifier les grandeurs physiques pertinentes, leur attribuer un symbole. Evaluer quantitativement les grandeurs physiques inconnues et non précisées, relier le problème à une situation modèle connue**).**
- **Etablir une stratégie de résolution, analyser (**Décomposer le problème en des problèmes plus simples, commencer par une version simplifiée, expliciter la modélisation choisie, déterminer et énoncer les lois physiques à utiliser**).**
- **Mettre en œuvre la stratégie, réaliser (**Mener la démarche jusqu'au bout afin de répondre explicitement à la question posée, savoir mener efficacement les calculs analytiques et la traduction numérique, utiliser l'analyse dimensionnelle**).**
- **Avoir un regard critique sur les résultats obtenus, valider (**s'assurer qu'on a répondu à la question posée, vérifier la pertinence du résultat trouvé, notamment en comparant avec des estimations ou ordres de grandeur connus, comparer le résultat obtenu avec le résultat d'une autre approche, étudier des cas limites plus simples dont la solution est plus facilement vérifiable ou bien déjà connue**).**
- **Communiquer (**Présenter la solution, ou la rédiger, en en expliquant le raisonnement et les résultats).

Caractéristiques administratives :
Nom de l'installation : Le Châtelet
Type d'appareil : télésiège à pinces fixes.
Constructeur : Pomagalski
Année de construction : 1997

Caractéristiques géométriques :
Altitude de la gare de départ (gare aval) : 1270m
Altitude de la gare amont : 1545m
Longueur : 950m
Dénivelé : 275m
Pente moyenne 30%, pente max 76%.

Caractéristiques de la ligne et d'exploitation :
Nombre de pylônes : 11
Vitesse en ligne : 2,5m/s.
Temps de montée 6min 20s.
Débit : 2250 personnes par heure.

Caractéristiques techniques :
Emplacement de la station motrice : aval
Type de motorisation principale : électrique
Nombre de moteur(s) électrique(s) : 1
Puissance : 225kW
Nombre de frein(s) de service : 1
Nombre de frein(s) de poulie : 2
Capacité des sièges : 119
Type de sièges ; sièges « Arceau »
Dispositifs d'accouplements : pinces fixes
Type d'embarquement : face à la ligne

1. Evaluer numériquement la puissance nécessaire lors du fonctionnement en régime permanent.
2. Evaluer numériquement le temps nécessaire pour remettre en route le télésiège après un arrêt.