

Problème 1 : Pilotage d'une platine vinyle.

A. Première solution de pilotage.

- On étudie la platine en rotation autour de l'axe fixe (Oz), le bilan des actions mécaniques est :
 - Le couple moteur donné dans l'énoncé $C_p(t)$.
 - L'action de la liaison pivot présentant un frottement fluide de de moment $C_f = -\mu\Omega$ et un frottement solide de couple $-C_s$ (si la platine tourne dans le sens trigonométrique).
 - L'action de gravité présente un moment nul par rapport à l'axe (Oz) car la platine est équilibrée.

- On applique le TMC à la platine par rapport à l'axe de rotation (Oz)

$$\frac{dL_{/Oz}}{dt} = J \frac{d\Omega}{dt} = C_p(t) - \mu\Omega - C_s \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \Omega = \frac{1}{\tau} \Omega_\infty} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{J}{\mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega_\infty = \frac{C_o - C_s}{\mu}}$$

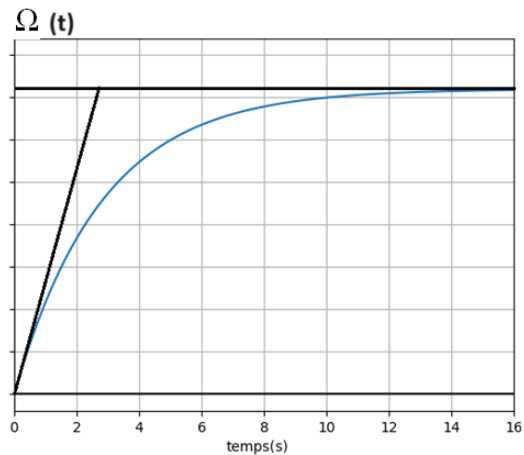
- La vitesse de rotation initiale est $\boxed{\Omega(0) = 0}$.

La solution de l'équation s'écrit sous la forme

$$S_G(t) = S_H(t) + S_P = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \Omega_\infty$$

On applique la condition initiale pour obtenir

finalement $\boxed{\Omega(t) = \Omega_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]}$



- La conversion pour la vitesse de rotation donne $\Omega_\infty = N_{nom} \frac{2\pi}{60} = \frac{C_{nom} - C_s}{\mu}$

On obtient $\boxed{C_{nom} = C_s + \mu N_{nom} \frac{2\pi}{60}}$ A.N : $\boxed{C_{nom} = 4,7 \cdot 10^{-1} N.m}$

- On cherche $t_{5\%}$ tel que $\Omega(t_{5\%}) = 0,95\Omega_\infty = \Omega_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right) \right]$ d'où $0,05 = \exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right)$

Finalement on obtient $\boxed{t_{5\%} = \tau \ln(20) \approx 3\tau}$ A.N : $\boxed{t_{5\%} = 15s}$. Cette solution de pilotage ne correspond pas à un temps de réponse conforme au cahier des charges.

B. Seconde solution de pilotage.

Afin d'améliorer le temps de réponse, on se propose d'imposer un couple $C_{dem} = 0,62 N.m$ pendant une durée t_{dem} égale à deux secondes puis de revenir à la valeur C_{nom} déterminé précédemment.

- En reprenant l'expression démontré en q3, on obtient sur $t \in [0, t_{dem} = 2s]$

$$\boxed{\Omega(t) = \frac{C_{dem} - C_s}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]} \quad \text{puis} \quad \boxed{\Omega_{dem} = \frac{C_{dem} - C_s}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{dem}}{\tau}\right) \right]} \quad \text{A.N} \quad \boxed{\Omega_{dem} = 3,6 \text{ rad.s}^{-1} = 35 \text{ tours / min}}$$

La vitesse de rotation atteinte dépasse la consigne de 6%, le cahier des charges demande donc que la vitesse diminue pour atteindre la vitesse de consigne sur la seconde phase de pilotage.

- Sur l'intervalle considéré on retrouve l'équation différentielle de la q2.

Alors $S_G(t) = S_H(t) + S_P = A' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \Omega_\infty$ avec la condition initiale $S_G(t_{dem}) = \Omega_{dem} = A' \exp\left(-\frac{t - t_{dem}}{\tau}\right) + \Omega_\infty$

Finalement $\boxed{\Omega(t) = \Omega_\infty + (\Omega_{dem} - \Omega_\infty) \exp\left(-\frac{t - t_{dem}}{\tau}\right)}$

On reprend le calcul de la q5 pour obtenir $\Omega(t_{5\%}) = 1,05\Omega_\infty = \Omega_\infty + (\Omega_{dem} - \Omega_\infty) \exp\left(-\frac{t_{5\%} - t_{dem}}{\tau}\right)$

Ce qui donne $\boxed{t_{5\%} = t_{dem} + \tau \ln\left(20 \left(\frac{\Omega_{dem}}{\Omega_\infty} - 1\right)\right)}$ l'A.N donne $\boxed{t_{5\%} = 7,5s}$, le cahier des charges est bien validé

avec cette seconde solution de pilotage.

C. Contrôle de la vitesse de rotation.

- Par l'éclairage stroboscopique, on éclaire le pourtour de la platine à intervalle de temps régulier donné ici par la fréquence de 60Hz par un flash lumineux de durée très courte donnant ainsi la position instantanée de la platine. En plaçant des points métalliques à intervalle régulier sur le bord de la platine, on peut s'arranger pour qu'ils apparaissent comme immobiles sous l'éclairage

stroboscopique lorsque la vitesse de consigne de 33 tours.min⁻¹ est atteinte. On contrôle ainsi le respect de la vitesse de consigne.

9. Pour que les points métalliques apparaissent fixes, il faut les placer régulièrement avec un écart angulaire régulier donné par l'angle parcouru par la platine entre deux flashes lorsque le disque tourne à la vitesse de consigne. Cet angle s'exprime $\theta = N_{nom} * \frac{2\pi}{60} * \frac{1}{f_{strob}}$

Le nombre de points métalliques à disposer est alors $N_{metal} = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{60f_{strob}}{N_{nom}}$ A.N $N_{metal} = 109$.

D. Pilotage du moteur pendant la lecture.

La lecture commence pour une durée de 30 minutes dans le cas du disque vinyle étudié, la pointe de la tête de lecture est alors posée sur le disque, elle suit le microsillon gravé sur le disque en forme de spirale d'Archimède.

10. En 30 minutes, à raison de 33 tours par minutes, on obtient $n_{tot} = 990 \text{ tours}$

11. L'angle θ_{max} est celui atteint après les n_{tot} tours d'où $\theta_{max} = 2\pi n_{tot} = 6,2.10^3 \text{ rad}$.

12. Avec la description faite : $R_{max} = R(0) = b$ et $R_{min} = R(\theta_{max}) = -a\theta_{max} + b$

On obtient $b = R_{max}$ $a = \frac{R_{max} - R_{min}}{\theta_{max}}$ Le pas est l'écart de rayon entre deux sillons successifs c'est-à-dire

la variation de rayon sur un tour d'ouverture angulaire 2π d'où $h = 2\pi.a = 76\mu\text{m}$

13. Cette force de frottement est exprimée à l'aide des lois de Coulomb $F_p = f_d P_{tete}$, il s'oppose à la mise en rotation du disque, cette force est donc orientée selon $\vec{u} = -\vec{y}_b$ d'où $\vec{F}_p = -f_d P_{tete} \vec{y}_b$

14. On applique le TMC au plateau, avec les mêmes actions mécaniques que dans la partie précédente et en y ajoutant l'action mécanique de la tête de lecture qui applique un moment par rapport à (Oz) sous la forme $M_p = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_p) \cdot \vec{e}_z = -R(\theta_p) F_p$

On obtient alors $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J \frac{d^2\theta_p}{dt^2} = C_p - \mu \frac{d\theta_p}{dt} - C_s - R(\theta_p) F_p$ et en remplaçant $R(\theta_p) = -a\theta_p + R_{ext}$

On obtient bien $J \frac{d^2\theta_p}{dt^2} + \mu \frac{d\theta_p}{dt} - F_p a \theta_p = C_p - C_s - R_{ext} F_p$

15. On écrit le polynôme caractéristique de l'équation différentielle étudiée $Jx^2 + \mu x - \frac{F_p}{2\pi} a$

Le discriminant s'écrit $\Delta = \mu^2 + 4JF_p a$, on observe qu'il est toujours positif et qu'il présente donc deux

racines positives $r_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\Delta}}{2J}$. La solution générale s'écrit alors $S_H(t) = A \exp(-r_+ t) + B \exp(-r_- t)$

16. Le second membre est constant on trouve la solution particulière $S_p = \frac{C_p - C_s - R_{ext} F_p}{F_p a}$

17. La solution générale de l'équation s'écrit alors $S_G(t) = S_H(t) + S_p$.

18. On observe que la fréquence de rotation est quasiment constante mais augmente légèrement sur l'intervalle de lecture $t \in [1, 30] \text{ min}$. On peut expliquer cette observation par la diminution du moment de frottement appliquée par la tête de lecture, de force constante mais de bras de levier passant de R_{ext} à R_{int} .

19. Sur cet intervalle, la vitesse de rotation passe de 32,8 à 33,1 tours par minutes ce qui correspond à un écart par rapport à la vitesse de consigne allant de -0,6% à +0,3% nettement inférieur à l'écart maximal de 2% figurant dans le cahier des charges. Il est donc inutile d'envisager d'asservir la vitesse de rotation du disque si celle-ci a été bien réglée dès le départ.