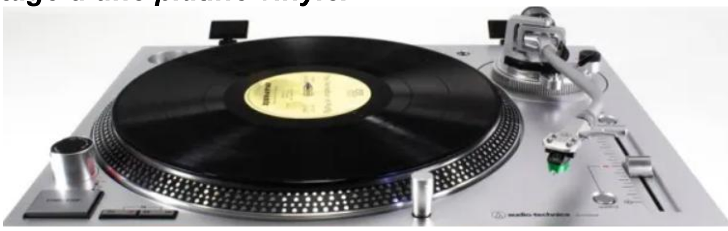
Problème 1 : Pilotage d'une platine vinyle.



L'objectif de ce problème est de piloter le moteur d'une platine vinyle afin de respecter le cahier des charges suivant :

- Le temps de réponse à 5% de la platine $t_{5\%}$ doit rester inférieur à 8s.
- La variation δN de la vitesse de rotation autour de la valeur de consigne N_{nom}=33tours.min^{-1} doit rester inférieure à 2%.

On suppose que la platine présente un moment d'inertie J=0,1kg.m^2 par rapport à l'axe (Oz) vertical autour duquel elle tourne, grâce à une liaison pivot, à la vitesse angulaire notée $\Omega(t)$ dans toute la suite du problème. On suppose également que la platine est équilibrée par rapport à cet axe de rotation.
Au niveau de la liaison pivot, on tiendra compte d'un couple de frottement fluide $C_f=-\mu\Omega$ où le coefficient de frottement prend la valeur μ=2.10^{-2}N.m.rad^{-1}.s et d'un couple de frottement solide de valeur absolue C_S=0,4N.m.

A. Première solution de pilotage.

Afin de mettre en rotation la platine, un moteur applique un échelon de couple $C_P(t)=\begin{cases}0 & si \quad t<0\\ C_O & si \quad t>0\end{cases}$ dans le but d'atteindre la vitesse de rotation nominale Ω_{nom} lorsque le régime est établi. La pointe de la tête de lecture est « en l'air » et ne touche pas le disque.

1. Faire le bilan des actions mécaniques sur la platine.
2. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de rotation sur l'intervalle $t\in[0;+\infty[$ et faire apparaître un temps caractéristique τ. Préciser également Ω_∞ la vitesse atteinte en régime stationnaire.
3. Indiquer la condition initiale vérifiée par la vitesse de rotation puis déterminer l'expression de la vitesse $\Omega(t)$. Faire une représentation graphique.
4. Exprimer Ω_∞ en fonction de N_{nom} et en déduire l'expression de C_{nom} permettant d'atteindre la vitesse de consigne. Faire l'application numérique.
5. Déterminer l'instant $t_{5\%}$ à partir duquel la vitesse de rotation reste égale à la vitesse de consigne à 5% près et faire l'application numérique. Commenter.

B. Seconde solution de pilotage.

Afin d'améliorer le temps de réponse, on se propose d'imposer un couple C_{dem}=0,62N.m pendant une durée t_{dem} égale à deux secondes puis de revenir à la valeur C_{nom} déterminée précédemment.

6. En vous appuyant sur les résultats de la partie A, et en les adaptant, déterminer l'expression de $\Omega(t)$ sur l'intervalle $t\in[0,t_{dem}=2s]$. En déduire l'expression de la vitesse de rotation Ω_{dem} atteinte à la fin de cette phase et faire l'application numérique.
7. Déterminer l'expression de la vitesse de rotation $\Omega(t)$ sur l'intervalle $t\in[t_{dem}=2s,+\infty]$ en fonction de Ω_{dem}, Ω_∞, t_{dem} et τ. En déduire l'expression du temps de réponse à $t_{5\%}$ dans cette nouvelle configuration. Faire l'application numérique et commenter.

C. Contrôle de la vitesse de rotation.

Un système de stroboscope à fréquence fixe égale à f_{str}=60Hz éclaire un bandeau sur lequel des points métalliques sur fond noir sont disposés régulièrement sur le pourtour de la platine.

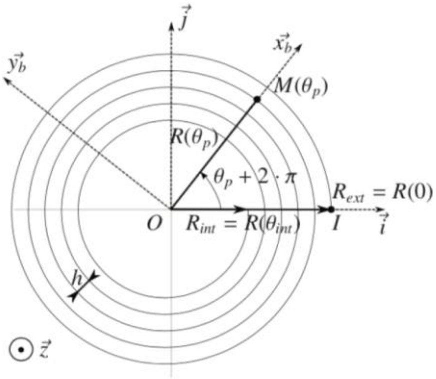
8. Rappeler le principe du fonctionnement d'un éclairage stroboscopique et expliquer comment il permet de contrôler le respect de la vitesse de consigne N_{nom}=33tours.
9. Exprimer et évaluer numériquement le nombre de points métalliques qu'il faut disposer sur le pourtour de la platine pour mettre en œuvre le contrôle par stroboscopie de la vitesse de rotation et l'évaluer pour les disques en 33 tours/min.

D. Pilotage du moteur pendant la lecture.

La lecture commence pour une durée de 30 minutes dans le cas du disque vinyle étudié, la pointe de la tête de lecture est alors posée sur le disque, elle suit le microsillon gravé sur le disque en forme de spirale d'Archimède.

10. Evaluer le nombre n_{tot} de tours effectués par le disque durant la lecture.

La spirale d'Archimède conduit à une équation polaire de la forme $R(\theta_P) = -a\theta_P + b$ selon la configuration montrée sur la figure ci-contre où la distance entre deux sillons a été volontairement augmentée afin d'améliorer la visibilité.



Lorsqu'on pose la tête de lecture sur le disque à l'instant t=0, on définit le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ lié au disque, où O est le centre du disque et I le point de contact de la tête, tel que $\overrightarrow{OI} = R_{ex}.\vec{i}$. Le repère R_b $(O, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z})$ est associé au bâti. Ainsi, selon ce modèle, tout se passe comme si la tête de lecture tournait autour du disque immobile.

Le rayon extérieur du disque est R_{ext}=150mm, le rayon intérieur est R_{int}=75mm. On prend comme conditions initiales $\theta_P(t=0)=0$; $R(t=0)=R_{ext}$.

11. Exprimer et évaluer numériquement θ_{max} (en radian) tel que $R(\theta_{max})=R_{int}$.
12. Exprimer a et b en fonction de R_{ext}, R_{int} et θ_{max}. Exprimer et évaluer numériquement le pas h de la spirale d'Archimède, c'est-à-dire la distance entre deux sillons successifs.

La composante verticale de l'action mécanique de la tête sur le disque est appelée P_{tete}, elle est réglée à l'aide d'un contrepoids placé sur le bras de manière à ce que $P_{tete}=3.0.10^{-2}$N. Le coefficient de frottement entre le vinyle et le diamant est noté f_d=0,3. Ainsi la pointe exerce une force de composante horizontale $\vec{F}_p$, liée aux frottements au niveau du point de contact avec le vinyle. On fera l'hypothèse que cette force est perpendiculaire au rayon $\overrightarrow{OM}$.

13. Déterminer l'expression littérale de la force $\vec{F}_p = F_p\vec{u}$ en fonction de f_d, P_{tete} et préciser la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$.

On considère d'abord que le couple moteur $C_p(t)$ est constant tout au long de la lecture de la piste, comme dans les parties précédentes. On prend comme conditions initiales une position angulaire nulle $\theta_p(t)=0$ et une vitesse angulaire nulle $\omega_p(t)=0$.

14. Appliquer le théorème du moment cinétique au plateau sur l'ensemble du mouvement et montrer que l'équation régissant l'évolution de l'angle $\theta_p(t)$ s'écrit :

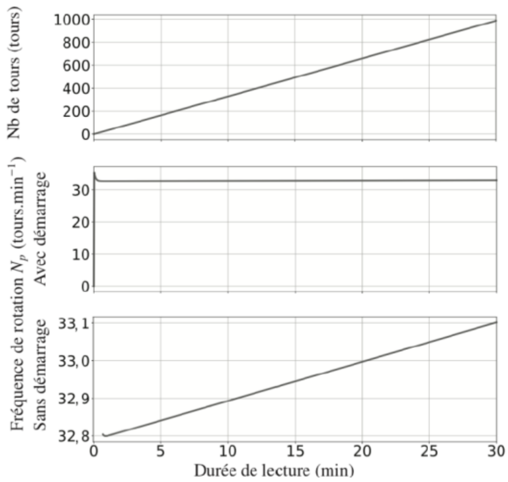
$$J\frac{d^2\theta_P}{dt^2} + \mu\frac{d\theta_P}{dt} - F_p a\theta_p = C_P - C_S - R_{ext}F_P$$

15. Etablir l'expression de $S_H(t)$ la solution générale de l'équation homogène.

On introduira $\Delta = \mu^2 + 4JF_p a$.

16. Donner l'expression de S_P la solution particulière de l'équation complète.
17. Donner alors la solution générale de l'équation sans chercher à déterminer les constantes qui y apparaissent

La résolution complète du problème nécessiterait de prendre en compte la variation du couple moteur C_P étudié dans la seconde solution de pilotage. Afin d'éviter de surcharger les calculs, cette résolution a été réalisée à l'aide d'un calcul numérique dont les résultats sont présentés ci contre.



18. Expliquer la tendance de la courbe (sans démarrage) de la fréquence de rotation sur l'intervalle de temps $t \in [1,30]$min
19. Montrer que sur l'intervalle de temps considéré précédemment, on peut considérer que $\omega_P(t)$ respecte le cahier des charges. Conclure quant à la nécessité d'asservir la vitesse de rotation du disque si celle-ci a été bien réglée dès le départ.