

Problème 1 : le projet Hyperloop.

A. Fonctionnement d'une pompe à palette.

1. Au cours de la phase d'aspiration numéro (n+1), on considère le système fermé suivant :
 - Début de l'aspiration, le gaz est à la pression P_n , occupe le volume V_O , présente une température T pour une quantité de matière n_n .
 - Fin de l'aspiration, le gaz est à la pression P_{n+1} , occupe le volume $V_O + V_b$, présente une température T pour une quantité de matière n_n .

On écrit la LGP pour ces deux états $n_n RT = P_{n+1} (V_O + V_b) = P_n V_O$ On obtient bien $P_{n+1} = \frac{V_O}{V_O + V_b} P_n$.

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{V_O}{V_O + V_b}$ et de valeur initiale P_O $P_n = \left(\frac{V_O}{V_O + V_b} \right)^n P_O$.

2. La pression minimale atteinte est la limite théorique de la suite $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_{\min} = 0$.
3. Le débit s'exprime par $D = \nu V_b$. Il ne présente pas de dépendance à la pression dans le réservoir.
4. Le débit volumique est quasiment constant et indépendant de la pression dans le réservoir sur la plage de pression située au dessus de la pression minimale dont on peut lire une valeur approchée sur la courbe d'environ 2mbar.
5. On tient compte du volume refoulé pour obtenir la quantité de matière qui est évacuée par un tour de la pompe ce qui donne $\Delta n RT = P_n V_b - P_O V_h$ ce qui donne $\Delta n = \frac{P_n V_b - P_O V_h}{RT}$.
6. Le volume extrait du réservoir à la pression P_n est alors donné par $P_n V_{\text{refoulé}} = P_n V_b - P_O V_h$
alors $V_{\text{refoulé}} = V_b - \frac{P_O}{P_n} V_h$ Le débit de la pompe est alors $D = \nu \left(V_b - \frac{P_O}{P} V_h \right)$

A forte pression, proche de P_O on retrouve un comportement limite $D = \nu (V_b - V_h)$, le débit est constant comme sur la courbe. A faible pression on trouve maintenant un débit qui diminue en inverse de la pression ce qui correspond à la croissance linéaire du $\log(D)$ en fonction de $\log(P)$ sur la courbe.

7. On reprend la démarche de la q1. Et on modifie l'état initial pour lequel le système est maintenant constitué d'un volume V_O à la pression P_n et d'un volume V_f à la pression P_O .

On obtient alors $n_n RT = P_{n+1} (V_O + V_b) = P_n V_O + P_O V_h$

Puis la relation $P_{n+1} = P_n \frac{V_O}{(V_O + V_b)} + P_O \frac{V_h}{(V_O + V_b)}$

La pression minimale est la limite de cette suite $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P_{\min}' = P_O \frac{V_h}{V_b}$

B. Faire le vide.

8. Pour la pression finale $P_f = 2\text{mbar}$, et pour les pressions intermédiaires, la courbe donnant le débit en fonction de la pression reste sous forme d'un plateau horizontal, la modélisation la plus simple permet donc bien de rendre compte du fonctionnement des pompes pour le système hyperloop.

Le débit volumique est alors donné par $D_t = ND = N \nu V_b$

9. On reprend le résultat de la question 1, après k coups des pompes extrayant un volume total NV_b à chaque fois d'un réservoir de volume V . $P_{kN} = \left(\frac{V}{V + NV_b} \right)^k P_O$

10. Pour k cycles, sachant qu'on fait ν cycles d'aspiration par unité de temps, $\Delta t = \frac{k}{\nu}$

11. On observe que $k_f = \nu \Delta t$ cycles de pompes sont nécessaires pour atteindre la pression P_f .

Alors $P_f = \left(\frac{V}{V + NV_b} \right)^{\nu \Delta t} P_O$ puis $\ln \left(\frac{P_f}{P_O} \right) = \nu \Delta t \ln \left(\frac{V}{V + NV_b} \right) = -\nu \Delta t \ln \left(1 + \frac{NV_b}{V} \right)$

Par DL1 autour de 0, on obtient $\ln\left(\frac{P_f}{P_o}\right) = -v\Delta t \frac{NV_b}{V} = -\frac{DN\Delta t}{V}$.

12. Le volume du tube hyperloop est $V = \frac{L\pi d^2}{4} = 2,34.10^6 m^3$

Le nombre de pompes situées tous les 2 kilomètres est $N = 300$

Le débit volumique de la pompe lu sur la courbe varie autour de $D = 250 m^3 \cdot h^{-1}$

On évalue alors $\Delta t = \frac{V}{DN} \ln\left(\frac{P_o}{P_f}\right) = 194 h = 8 j$ Cette valeur montre qu'il faudra maintenir la sous-pression en permanence dans le tube si on souhaite le mettre en service quotidiennement.

C. Déplacer l'air restant.

13. On suppose que ce compresseur fonctionne de manière adiabatique, c'est-à-dire sans qu'aucun échange thermique n'intervienne dans la transformation subie par le gaz, on en déduit $q = 0$.

14. D'après le cours pour un GP : $h_s - h_E = \frac{\gamma R}{M_{air}(\gamma - 1)}(T_s - T_E)$

15. La masse volumique est obtenue à partir de la loi des gaz parfaits $P_E V = nRT_E$ ce qui

donne $v_E = \frac{RT_E}{M_{air} P_E}$ et donc $\rho_{air,E} = \frac{1}{v_E} = \frac{M_{air} P_E}{RT_E}$

16. Le débit volumique est donné par $D_v = \pi R^2 v$ et le débit massique par $D_m = \pi R^2 \cdot \rho_{air} v$.

17. Par analyse dimensionnelle, on établit $P_{méca} = D_m \cdot w$

18. $P_{méca}$ la puissance mécanique fournie par le compresseur est alors $P_{méca} = D_m \cdot (h_s - h_E)$

Ce qui donne $P_{méca} = \pi R^2 v P_E \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \left(\frac{T_s}{T_E} - 1 \right)$

19. On obtient $T_s = T_E + \frac{(\gamma - 1) P_{méca}}{\gamma \pi R^2 v P_E}$ ce qui donne $T_s = 597 K$

20. La transformation subie par le gaz parfait est adiabatique, supposée quasi-statique, les lois de

Laplace donnent $P_s^{1-\gamma} T_s^\gamma = P_E^{1-\gamma} T_E^\gamma$ et $P_s = P_E \left(\frac{T_E}{T_s} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ A.N $P_s = P_E \left(\frac{T_E}{T_s} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 1,58.10^3 Pa$.

On peut évaluer la force de poussée correspondant $F_{poussée} = 5,8.10^3 N \approx 590 g$ (g accélération de la pesanteur). La force produite est non négligeable, il faudrait connaître la masse des nacelles pour pouvoir la comparer au poids.

Problème 2 : stockage du CO₂.

a. Exploitation du diagramme (P,T).

- Voir diagramme.
- Le point (c) est le point triple du dioxyde de carbone, il donne les conditions de température et de pression nécessaire pour observer un état d'équilibre où les trois phases solide, liquide et gaz sont réunies.

Le point (d) est le point critique qui marque la fin de la courbe des équilibre liquide vapeur. Au-delà de cette limite, on observe plus réellement de transition de phase à deux états liquide-gaz mais un fluide dont le volume massique évolue de manière continue lorsque la température et la pression sont modifiées.

- On trace sur le diagramme (voir annexe) l'isotherme $T_0=280\text{K}$ (placé à 2,9cm sur l'échelle horizontale en exploitant l'échelle linéaire), on observe qu'elle coupe la courbe des équilibres liquide-gaz, on peut donc envisager une transition vapeur→liquide à cette température.

On reporte alors l'intersection de la courbe des équilibres avec l'isotherme sur l'axe des ordonnées pour lire la

pression de vapeur saturante (voir annexe). On lit alors l'échelle logarithmique pour obtenir $\frac{2,8}{6,9} = \frac{\log P_{\text{sat}}(T_0)}{\log 10^4}$

Ce qui donne $P_{\text{sat}}(T_0) = 10^{\frac{4 \cdot 2,8}{6,9}} = 4,2 \cdot 10^1 \text{ bar}$

- On observe que le CO₂ réalise la transition liquide-solide au point (a) du diagramme ce qui permet d'en conclure directement que la pression à laquelle la solidification a lieu à la température de 280K est donné par l'énoncé à $P_a = 4 \cdot 10^3 \text{ bar}$

- On exploite les données fournies pour obtenir $P_a = P(z_{\min}) = P_0 + \rho_0 g z_{\min}$

ce qui donne $z_{\min} = \frac{P_a - P_0}{\rho_0 g} = 39,6 \text{ km}$, cette profondeur n'est pas atteignable puisque la fosse des Mariannes, le

point le plus profond recensé dans les océans est situé à 11km de profondeur. La technique est donc inapplicable et en un sens on pourrait dire tant mieux !!

b. Exploitation du diagramme (P,v).

- (Voir diagramme)
- (Voir diagramme)
- A la température de 280K, on observe bien le plateau de transition de phase liquide-vapeur, il est situé sur le diagramme (P,v) à une pression de vapeur saturante $P_{\text{sat}}(T_0)=42\text{bar}$ tout à fait cohérente avec la valeur trouvée dans la première partie. Les diagrammes (P,v) et (P,T) sont cohérents.
- Pour $T=295\text{K}$, on lit dans le tableau un volume massique en phase gaz de $4,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ permettant de placer le point G sur la courbe de rosée ainsi qu'un volume massique de la phase liquide de $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ permettant de placer le point L sur la courbe d'ébullition. On trace alors le plateau de la transition de phase liquide-gaz. On trace alors une isotherme dans le liquide de forte pente et une isotherme dans le gaz de faible pente en marquant les passages de la courbe de saturation par une rupture nette de pente (voir diagramme).

- On applique le modèle de gaz parfait au CO₂ : $P_{\text{sat}} v_G = \frac{RT}{M}$ avec $T=295\text{K}$, $P_{\text{sat}}=60\text{bar}$ lu sur le diagramme

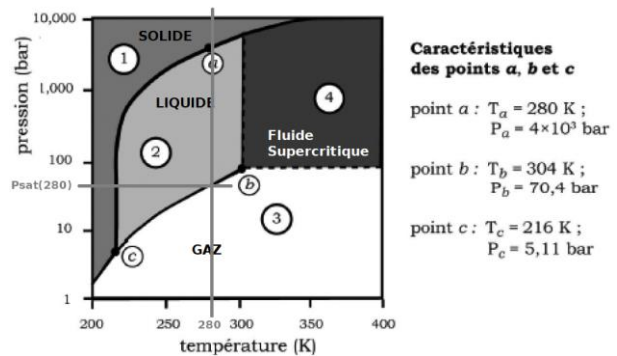
ce qui donne $v_G = \frac{RT}{MP_{\text{sat}}} = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ la valeur tabulée est de $4,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ce qui est quasiment la

moitié du volume estimé avec le modèle de gaz parfait qui ne s'applique évidemment pas pour la phase vapeur saturante dans ces conditions.

- (Voir diagramme).

On calcule les volume massique suivant $v_I = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ et $v_{II} = v_{III} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

Dans l'état (I) le CO₂ es ten phase gaz, dans l'état (II) il présente un état d'équilibre liquide-gaz, et dans l'état (III) il est en phase fluide supercritique pusiqu'il est situé au dessus du point critique.



12. On connaît le volume du système $V=54L$ et la masse du système $m=18kg$. Grâce au tableau les volumes massiques des phases liquide et vapeur saturants $v_L = 1,1 \cdot 10^{-3} m^3 kg^{-1}$ et $v_G = 8,1 \cdot 10^{-3} m^3 kg^{-1}$

On exploite alors l'extensivité du volume pour écrire $V = m_L v_L + m_G v_G$ et on écrit aussi $m = m_L + m_G$

On résout le système d'équations ainsi établi et on obtient : $m_L = m \frac{v_G - v_{II}}{v_G - v_L} = 13kg$ et $m_G = m \frac{v_{II} - v_L}{v_G - v_L} = 5kg$

13. L'enthalpie est également extensive, on en déduit $H_{(II)} = m_L h_L + m_G h_G$ et à l'aide du tableau de données thermodynamiques fourni on obtient : $H_{(II)} = 4,88 \cdot 10^3 kJ$

On en déduit l'énergie interne du système $U_{(II)} = H_{(II)} - P_{(II)} V_{(II)} = 4,65 \cdot 10^3 kJ$

14. Pour le GP, l'équation d'état est $P_{GP} v = \frac{RT}{M}$ ce qui correspond à négliger l'influence des paramètres a et b, alors l'énergie interne massique s'exprime $u_{GP} = c_v T + u_o$ en négligeant l'influence de a.

15. L'enthalpie du système s'écrit dans l'état (I) qui est un gaz sous la forme suivante pour les deux modèles $U_{(I)} = m u_{(I)}$

➤ $U_{(I),GP} = m(c_v T_{(I)} + u_o) = 7,5 \cdot 10^3 kJ$ et $U_{(I),VdW} = m\left(c_v T_{(I)} - \frac{a}{v_I} + u_o\right) = 7,27 \cdot 10^3 kJ$

On obtient un écart de 3% entre les deux valeurs estimées ce qui reste acceptable.

➤ De même $U_{(III),GP} = 7,85 \cdot 10^3 kJ$ et $U_{(III),VdW} = 6,72 \cdot 10^3 kJ$

Cette fois, on obtient un écart bien plus important de l'ordre de 15% qui est cette fois-ci très important. C'est assez logique puisque le fluide est alors en état supercritique.

16. On effectue un bilan énergétique sur la transformation (II) vers (III) qui est isochore, on obtient alors par le premier principe : $U_{(III)} - U_{(II)} = Q_{(II) \rightarrow (III)}$ ce qui donne avec le résultat de la question 13. et la valeur

obtenue par le gaz de Van der Waals en question 15. $Q_{(II) \rightarrow (III)} = 2,07 \cdot 10^3 kJ$

