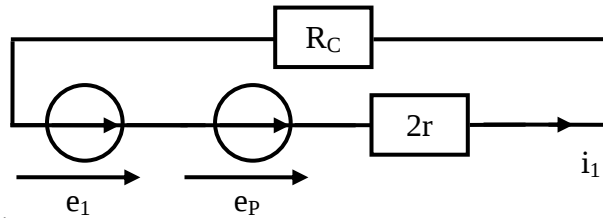


Exercice 4 : étude d'un alternateur.

1. La loi de Faraday nous permet d'affirmer que la force électromotrice générée dans le circuit (1) s'exprime :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} \text{ avec } \Phi_1(t) = \Phi_o \cos(\Omega t), \text{ on obtient : } \boxed{e_1(t) = \Phi_o \Omega \sin \Omega t}$$

De même : $e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt}$ avec $\Phi_2(t) = \Phi_o \sin(\Omega t)$, on obtient : $\boxed{e_2(t) = -\Phi_o \Omega \cos \Omega t}$



2. Pour le circuit 1 :

La loi des mailles donne : $e_1(t) + e_p(t) = (R_C + 2r)i_1$ La fém d'auto-induction s'exprime : $e_p(t) = -2L \frac{di_1}{dt}$

D'où l'équation différentielle :

$$\boxed{2L \frac{di_1}{dt} + (R_C + 2r)i_1 = \Phi_o \Omega \sin \Omega t}$$

De même :

$$\boxed{2L \frac{di_2}{dt} + (R_C + 2r)i_2 = -\Phi_o \Omega \cos \Omega t}$$

3. Les équations précédentes se réécrivent :
- $$2L \frac{di_1}{dt} + (R_C + 2r)i_1 = \Phi_o \Omega \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2L \frac{di_2}{dt} + (R_C + 2r)i_2 = \Phi_o \Omega \cos(\Omega t - \pi)$$

On effectue alors le passage en notation complexe pour des grandeurs de pulsation Ω ce qui donne pour les amplitudes complexes des courants :

$$\boxed{i_{10} = \frac{-j\Phi_o \Omega}{2jL\Omega + R_C + 2r}} \text{ et } \boxed{i_{20} = \frac{-\Phi_o \Omega}{2jL\Omega + R_C + 2r}}$$

Alors les intensités réelles s'expriment : $i_1(t) = I_m(\Omega) \cos(\Omega t - \pi/2 - \varphi)$ et $i_2(t) = I_m(\Omega) \cos(\Omega t - \pi - \varphi)$

Avec $\boxed{I_m(\Omega) = |i_{10}| = \frac{\Phi_o \Omega}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}}}$ et $\tan \varphi = \frac{2L\Omega}{R_C + 2r}$ avec le choix d'intervalle $\boxed{\varphi = \arctan \frac{2L\Omega}{R_C + 2r}}$

4. Le déphasage entre i_1 et i_2 est constant : $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ négatif. Le courant dans le circuit 2 est donc en retard de phase sur le courant dans le circuit 1, il est par conséquent également en retard temporellement. (a) représente donc l'intensité i_1 et (b) représente l'intensité i_2 .

5. La vitesse de rotation Ω du rotor donne la pulsation des signaux observés, on peut donc la déterminer par mesure de la période T des signaux par la relation : $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

On mesure : $\boxed{T = 0,4s}$ d'où la vitesse de rotation $\boxed{\Omega = 15,7 \text{ rad.s}^{-1}}$ ou encore 150 tours par minutes ce qui correspond exactement à la vitesse de rotation de fonctionnement optimal de l'éolienne.

6. Les puissances délivrées dans les circuits 1 et 2 s'expriment :

$$\boxed{P_{G,1}(t) = e_1(t) \cdot i_1(t) = \frac{\Phi_o^2 \Omega^2}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \sin \Omega t \sin(\Omega t - \varphi)}$$

$$\boxed{P_{G,2}(t) = e_2(t) \cdot i_2(t) = \frac{\Phi_o^2 \Omega^2}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \cos \Omega t \cos(\Omega t - \varphi)}$$

La puissance totale donne : $P_G(t) = \frac{\Phi_o^2 \Omega^2}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} (\cos \Omega t \cos(\Omega t - \varphi) + \sin \Omega t \sin(\Omega t - \varphi))$

On aboutit alors bien à une puissance totale constante : $\boxed{P_G = \frac{\Phi_o^2 \Omega^2}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \cos \varphi}$

7. Le champ magnétique généré s'exprime :

$$\vec{B}_{1+2} = k \frac{\Phi_o \Omega}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \left(\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{e}_x + \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \vec{e}_y \right)$$

Il s'agit bien d'un vecteur d'amplitude constante donnée par : $\|\vec{B}_{1+2}\| = k \frac{\Phi_o \Omega}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + (R_C + 2r)^2}}$ **tournant à la vitesse angulaire Ω et affichant sur le rotor un retard angulaire constant $\alpha = -\pi/2 - \varphi$.**

8. Le couple exercé sur l'aimant de moment dipolaire $\vec{M} = M \cdot \vec{n}$ par le champ magnétique des bobines $\vec{B}_{1+2}$ par rapport à l'axe (Oz) s'exprime : $\Gamma_{1+2} = (\vec{M} \wedge \vec{B}_{1+2}) \cdot \vec{e}_z$

On obtient alors par le calcul :

$$\Gamma_{1+2} = \frac{kM\Phi_o\Omega}{\sqrt{4L^2\Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\frac{kM\Phi_o\Omega}{\sqrt{4L^2\Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \cos(\varphi)$$

9. On applique le théorème du moment cinétique pour le rotor par rapport à son axe de rotation (Oz) ce qui donne :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m + \Gamma_{1+2}$$

En régime permanent, la vitesse de rotation est constante ce qui donne : $\frac{d\Omega}{dt} = 0$

Le couple moteur s'exprime alors : $\Gamma_m = \frac{kM\Phi_o\Omega}{\sqrt{4L^2\Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \cos(\varphi)$ qui est bien positif puisque φ a été choisi initialement comme appartenant à l'intervalle $]-\pi/2 ; \pi/2[$.

La puissance mécanique motrice s'exprime alors par la relation :

$$P_M = \Gamma_m \Omega = \frac{kM\Phi_o\Omega^2}{\sqrt{4L^2\Omega^2 + (R_C + 2r)^2}} \cos(\varphi)$$

10. On peut effectuer le bilan de puissance mécanique par le théorème de l'énergie cinétique pour le rotor ce qui donne : $J\Omega \frac{d\Omega}{dt} = \Omega\Gamma_m + \Omega\Gamma_{1+2}$ soit $P_m + P_{1+2} = 0$

La conversion de puissance par l'induction permet alors d'écrire la relation : $P_G + P_{1+2} = 0$

On obtient alors la relation : $P_m = P_G$ la puissance mécanique fournie par le moteur est entièrement convertie en puissance électrique délivré dans les deux circuits.

En comparant les expressions de ces deux puissances, on obtient bien qu'il faut que : $\Phi_o = k \cdot M$.

- Φ_o s'exprime en $T \cdot m^2$ puisqu'il s'agit d'un flux magnétique.
- k s'exprime en $T \cdot A^{-1}$ d'après la relation qui définit cette constante.
- M est en $A \cdot m^2$.

On obtient bien que le produit $k \cdot M$ présente la même unité que le flux magnétique Φ_o .

11. La résistance R_C est largement supérieure à la résistance interne des bobines, on pourra donc négliger ces dernières.

L'éolienne fournit une puissance électrique : $P_N = \frac{\Phi_o^2 \Omega^2}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + R_C^2}} \cos \varphi = \frac{\Phi_o^2 \Omega^2 R_C}{4L^2 \Omega^2 + R_C^2}$ égale à 6kW.

L'intensité efficace dans une bobine s'exprime par :

$$i_{eff} = \frac{I_m(\Omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi_o \Omega}{\sqrt{4L^2 \Omega^2 + R_C^2}} = \sqrt{\frac{P_N}{2R_C}} = 3,5 \cdot 10^{-1} A$$

12. En cas de fonctionnement optimal de l'éolienne : $\Phi_o = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{P_N (4L^2 \Omega^2 + R_C^2)}{R_C}} = 7,6 \cdot 10^2 T \cdot m^2$

13. Le moment magnétique du rotor est exprimé par le produit de son aimantation et de son volume soit :

$$M = M_A \cdot N \cdot V_o = 1,8 \cdot 10^3 A \cdot m^2 \text{ d'où le coefficient } k = \frac{\Phi_o}{M} = 0,42 T \cdot A^{-1}$$

14. Finalement l'intensité du champ magnétique tournant s'exprime : $\|\vec{B}_{1+2}\| = k \sqrt{\frac{P_N}{R_C}} = 2,1 \cdot 10^{-1} T$.