Problème 1 : Etude de divers aspects d'une automobile.

A. Voiture en translation le long d'une route rectiligne.

1. Le Véhicule est soumis à trois actions mécaniques, les actions résistives étant totalement négligées :
   - L'action motrice du moteur de puissance P entrainant la translation selon l'axe (Ox).
   - L'action de gravité dirigée selon la verticale perpendiculaire à (Ox).
   - L'action de contact avec la route qui ne travaille pas puisque les actions résistives sont négligées.
2. On écrit le théorème de la puissance cinétique pour ce véhicule : $\frac{dE_C}{dt} = P$

On l'intègre alors sous la forme $E_C(t) - E_C(0) = Pt$ avec la condition initiale v(0)=0, Ec(0)=0.

D'où $E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2 = Pt$ et finalement $\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}}$

3. On obtient l'accélération $\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \sqrt{\frac{P}{2mt}}}$

On obtient la position en intégrant $v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}$ par séparation des variables

$\int_0^x dx' = \int_0^t \sqrt{\frac{2Pt'}{m}}dt'$ ce qui donne $\boxed{x(t) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{P}{m}}(2t)^{\frac{3}{2}}}$

4. On obtient de la q2 $2t = \frac{mv^2}{P}$ qu'on injecte pour obtenir $\boxed{x(v) = \frac{mv^3}{3P}}$ A.N : $\boxed{x(90km/h) = 83m}$
5. On reprend la loi de la puissance cinétique pour la nouvelle situation. On ajoute le terme associé au frottement en exprimant la puissance associée : $\vec{F}_{frott} = -mkv^2\vec{e}_x$ d'où $P_{frott} = \vec{F}_{frott}.\vec{v} = -mkv^3$

La loi de la puissance cinétique donne alors $\frac{dE_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = P + P_{frott}$

Avec $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv^2\frac{dv}{dx}$ on obtient bien $\boxed{mv^2\frac{dv}{dx} = P - mkv^3}$

6. Lorsque le véhicule atteint une vitesse limite constante, l'équation devient $0 = P - mkv_\infty^3$

On obtient alors $\boxed{v_\infty = \left(\frac{P}{mk}\right)^{\frac{1}{3}}}$ A.N : $k = \frac{P}{mv_\infty^3} = 5.10^{-4}m^{-1}$

7. On remplace v dans l'équation par u v_∞ ce qui donne $mv_\infty^3u^2\frac{du}{dx} = P - mkv_\infty^3u^3$

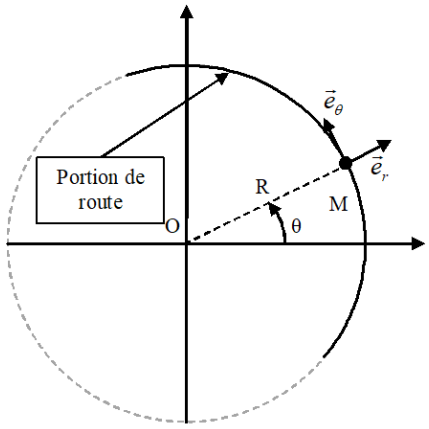
D'où $u^2\frac{du}{dx} = \frac{P}{mv_\infty^3} - ku^3 = k\left(1-u^3\right)$ la distance caractéristique du système est donc $L = \frac{1}{k} = 2.10^3m$.

8. On reprend $u^2\frac{du}{dx} = \frac{P}{mv_\infty^3} - ku^3 = k\left(1-u^3\right)$ on sépare les variables $\int_0^u \frac{u'^2}{1-u'^3}du' = k\int_0^x dx'$

On obtient $-\frac{1}{3}\left[\ln\left(1-u'^3\right)\right]_0^u = kx$ finalement $x = -\frac{1}{3k}\ln\left(1-u^3\right)$ d'où $\boxed{x(v) = -\frac{L}{3}\ln\left(1-\left(\frac{v}{v_\infty}\right)^3\right)}$

B. Voiture à vitesse constante dans un virage.

9.



Pour une trajectoire circulaire, la base de projection adaptée est la base polaire centrée sur O le centre du cercle.

10. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_r$.

Le vecteur vitesse est $\vec{v}_{M/R} = \mathrm{R}\,\dot{\theta}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta = v_O\vec{e}_\theta$.

Le vecteur accélération est $\vec{a}_{M/R} = -\mathrm{R}\,\dot{\theta}^2\,\vec{\mathrm{e}}_r = -\dfrac{v_O^2}{R}\vec{e}_r$.

11. En traduisant le critère donné : $\|\vec{a}_{M/R}\| = \dfrac{v_O^2}{R} < \mu g$

d'où $\boxed{R > R_{\min} = \dfrac{v_O^2}{\mu g}}$

A.N : $\boxed{R_{\min}(90km/h) = 0,53km}$ $\boxed{R_{\min}(130km/h) = 1,1km}$ commentaire: double

C. Pression des pneumatiques.

12. Il y a conservation de la quantité de matière et de la température, d'après la LGP, il y a conservation du produit PV d'où $\boxed{V_O = \dfrac{P_1V_1}{P_O} = 90L}$.

13. On souhaite introduire la quantité de matière n' permettant de passer de P_2 à P_3 dans le pneu ce qui donne d'après la LGP $n'RT_1 = (P_3 - P_2)V$ qui correspond à un volume V' donné par $n'RT_1 = P_OV'$.

On en déduit le volume d'air introduit $\boxed{V' = \dfrac{P_3 - P_2}{P_O}V = 28L}$.

14. On a retiré du réservoir la quantité de matière n' d'où : $(n - n')RT_1 = P_1V_1 - (P_3 - P_2)V = P_4V_1$.

Ce qui donne $\boxed{P_4 = P_1 - (P_3 - P_2)\dfrac{V}{V_1} = 4,1bars}$.

15. Dans le pneu, on exploite encore la LGP $P_5V = n_{pneu}RT_5$ et $P_3V = n_{pneu}RT_1$, on en déduit $\boxed{T_5 = T_1\left(\dfrac{P_5}{P_3}\right) = 362K = 89°C}$. On est largement sous la température de dégradation, il n'y a pas de risque d'explosion (encore heureux !).

16. On suppose que l'équilibre de la voiture se fait entre le poids $-mg\vec{e}_z$ et les forces de pressions dans les quatre pneus présentant chacun une surface de contact S ce qui donne un force $4SP_3\vec{e}_z$.

On en déduit par la condition d'équilibre projeté sur la verticale $S = \dfrac{mg}{4P_3} = 1,510^{-2}m^2$.

17. Pour éviter l'aquaplaning, il faut s'assurer que la pression des pneus respecte les consignes constructeurs. Si la pression diminue, la surface d'écrasement du pneu est plus grande et la masse du véhicule sera plus facilement portée par le film d'eau présent sur la route. D'autre part, cette eau sera plus difficilement évacuée par les rainures dans les pneus.

D. Allumage automatique des feux de position.

18. On peut considérer que l'ALI fonctionne en régime linéaire car il y a une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse.

19. L'ALI fonctionne en régime linéaire, on peut donc écrire $U_e = U_+ = U_-$.

Puisque l'ALI est idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne inverseuse est nulle et la loi des nœuds terme de potentiel à l'entrée inverseuse s'écrit $\dfrac{U_- - 0}{R_1} + \dfrac{U_- - U_S}{R_2} + 0 = 0$ d'où $\boxed{G = \dfrac{U_S}{U_e} = \left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)}$.

On peut par exemple prendre comme résistances : $\boxed{R_1 = 1k\Omega; R_2 = 49k\Omega}$.

20. Puisque l'ALI est idéal, l'intensité du courant entrant dans la borne non-inverseuse est nulle

On en déduit par la loi d'Ohm que $\boxed{U_e = RI = RI_O + RaE}$.

21. On obtient alors $U_S = GU_e = GRI_O + GRaE$ de la forme $\boxed{U_S = U_O + KE}$ avec $\boxed{U_O = GRI_O}$ et $\boxed{K = GRa}$.

22. L'éclairement de déclenchement des phares est $\boxed{E = \dfrac{U_S - U_O}{K}}$ A.N $\boxed{E = 1,85.10^2W.m^{-2}}$.

E. Etude de la suspension.

23. Le bilan des forces sur le point matériel de masse m est :
    - L'action de gravité exerçant le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.
    - L'action de rappel élastique de l'amortisseur $\vec{F}_{el} = -k\left(l - l_O\right)\vec{e}_z$.
    - L'action de l'amortisseur ajoutant la force de frottement fluide $\vec{F}_t = -h\vec{v} = -h\dot{l}\vec{e}_z$.
24. La condition d'équilibre s'écrit $\vec{P} + \vec{F}_{el} = \vec{0}$ la force de frottement étant nulle ici.

Par projection sur (Oz) $-k\left(l_{eq} - l_O\right) - mg = 0$ et finalement $\boxed{l_{eq} = l_O - \frac{mg}{k}}$.

25. La 2LN pour le point matériel dans le référentiel terrestre s'écrit $\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = m\vec{a}_{M/R} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_t$.

Ce qui donne par projection sur (Oz) $m\ddot{l} = -mg - k\left(l - l_O\right) - h\dot{l}$ d'où $m\ddot{l} + h\dot{l} + kl = k\left(l_O - \frac{mg}{k}\right) = kl_{eq}$.

On fait le changement de variable $z = l - l_O + \frac{mg}{k}$; $\dot{z} = \dot{l}$; $\ddot{z} = \ddot{l}$ donnant $m\frac{d^2z}{dt^2}(t) + h\frac{dz}{dt}(t) + k.z(t) = 0$.

26. Pour que le système présente un régime pseudo-périodique, il faut que le discriminant du polynôme caractéristique soit négatif. Pour le polynôme $mr^2 + hr + k = 0$, on calcule $\Delta = h^2 - 4km = -2,57.10^7 kg^2s^{-2}$, le mouvement sera donc bien pseudo-périodique.
27. On peut écrire les racines du polynôme caractéristiques $r_\pm = \frac{-h \pm j\sqrt{4km - h^2}}{2m} = -\alpha \pm j\omega$

On en déduit $\boxed{\alpha = \frac{h}{2m}}$ et $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{h}{2m}\right)^2}}$. La pseudo-période s'exprime alors $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{h}{2m}\right)^2}} = 0,73s}$.

28. Avec $z(t) = A\exp(-\alpha t)\cos(\omega t + \varphi)$ et $\dot{z}(t) = A\exp(-\alpha t)\left(-\alpha\cos(\omega t + \varphi) - \omega\sin(\omega t + \varphi)\right)$

Les conditions initiales donnent : $z(0) = z_O = A\cos(\varphi)$ et $\dot{z}(0) = 0 = -A\left(\alpha\cos\varphi + \omega\sin(\varphi)\right)$

On en déduit $\tan(\varphi) = -\frac{\alpha}{\omega}$ et on choisit $\boxed{\cos\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}}$ on en déduit $\boxed{A = z_O\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} = 5,1cm}$.

29. Pour la fonction de transfert (1) : $|\underline{H}_1| \xrightarrow{\omega \to 0} H_O$ et $|\underline{H}_1| \xrightarrow{\omega \to +\infty} 0$

    Pour la fonction de transfert (2) : $|\underline{H}_2| \xrightarrow{\omega \to 0} 0$ et $|\underline{H}_2| \xrightarrow{\omega \to +\infty} H_O$

    Pour la fonction de transfert (3) : $|\underline{H}_3| \xrightarrow{\omega \to 0} 0$ et $|\underline{H}_3| \xrightarrow{\omega \to +\infty} 0$
30. En observant les deux courbes de la figure, on retrouve les comportements asymptotiques de la fonction de transfert (1) qui donnera donc la réponse fréquentielle en amplitude de la suspension.
31. On observe sur la courbe de réponse du véhicule ancien un maximum qui correspond au phénomène de résonnance.
32. On reprend l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_1(jx) = \frac{H_O}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2}$

On exprime le module de module $H_1(x) = \left|\underline{H}_1(jx)\right| = \frac{H_O}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

Ce module présente un maximum si la fonction $f(x) = \left(1 - x^2\right)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ présente un minimum.

$$\frac{df}{dx}(x) = 2*(-2x)*\left(1 - x^2\right) + \frac{2x}{Q^2} = 2x\left[x^2 - 1 + \frac{2}{Q^2}\right]$$

Cette dérivée ne peut s'annuler que si $1 - \frac{2}{Q^2} > 0$ ce qui amène à la condition $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

La dérivée est négative avant $x_{\min} = \sqrt{1 - \frac{2}{Q^2}}$ et positive après, on a bien une résonnance en amplitude.

F. Moteur thermique.

33. Sur les transformations BC et DA qui sont isochores, on peut écrire le premier principe pour obtenir les transferts thermiques reçus ce qui donne :

$U_C - U_B = Q_{BC} + W_{BC}$ avec le modèle du gaz parfait $U_C - U_B = C_V\left(T_C - T_B\right)$ et $W_{isoV} = 0$

Finalement $\boxed{Q_{BC} = C_V\left(T_C - T_B\right)}$ et de même $\boxed{Q_{DA} = C_V\left(T_A - T_D\right)}$

34. Il reste à exprimer le travail reçu par le gaz sur les transformations adiabatiques reversibles. On peut utiliser à nouveau le premier principe :

$U_D - U_C = Q_{CD} + W_{CD}$ avec le modèle du gaz parfait $U_D - U_C = C_V\left(T_D - T_C\right)$ et $Q_{adiab} = 0$

Finalement $\boxed{W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = C_V\left(T_D - T_C + T_B - T_A\right)}$

35. Le rendement du moteur est défini $\boxed{\eta = \frac{utile}{cout} = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}}$.

36. Pour la transformation AB, adiabatique quasistatique-réversible on emploie un modèle de gaz parfait, on peut donc appliquer les lois de Laplace ce qui donne $T_A V_{\max}^{\gamma-1} = T_B V_{\min}^{\gamma-1}$

On en déduit que $\boxed{T_B = T_A a^{\gamma-1}}$ et de même $\boxed{T_C = T_D a^{\gamma-1}}$

37. On obtient alors bien $\boxed{\eta = 1 - a^{1-\gamma}}$. Pour obtenir le meilleur rendement possible, il faut alors chercher à maximiser le rapport de compression a. A.N : $\boxed{\eta = 0,58}$ ce rendement théorique du moteur à essence classique à quatre temps est déjà relativement faible. 42% du transfert thermique produit par la source chaude interne est perdue vers la source froide.

38. L'équation bilan donne $C_8H_{18}(l) + \frac{25}{2}O_2(g) = 8CO_2(g) + 9H_2O(g)$

39. Un volume V=6L d'octane correspond à une quantité de matière $n_{oct} = \frac{\mu_{oct}V}{M_{oct}}$

La quantité de matière de O_2(g) nécessaire à la combustion est alors $n_{O_2} = 12,5 * n_{oct}$ et la quantité de matière d'air (O_2 à 20% et N_2 à 80%) est alors $n_{air} = 5*12,5*n_{oct} = 62,5\frac{\mu_{oct}V}{M_{oct}}$

Finalement de volume d'air nécessaire pour bruler 6L d'octane est $\boxed{V_{air} = 62,5\frac{\mu_{oct}V}{M_{oct}}V_{mol} = 51m^3}$

40. Dans les mêmes conditions, on produit 8 moles de CO_2 à chaque moles d'octane consommée ce qui donne $\boxed{V_{CO_2} = 8\frac{\mu_{oct}V}{M_{oct}}V_{mol} = 6,6m^3}$

41. On reprend le calcul pour obtenir $m_{CO_2} = M_{CO_2}n_{CO_2} = M_{CO_2} * 8n_{oct} = 8\frac{\mu_{oct}V}{M_{oct}}M_{CO_2}$

L'application numérique donne $\boxed{m_{CO_2} = 13kg}$ pour 100km.

42. On observe sur le cycle de Miller que l'aire du cycle est plus grand que celle du cycle de Beau de Rochas. On obtiendra donc plus de travail par cycle. Si on s'arrange comme le constructeur l'affirme sur son site pour que la dépense de chaleur soit la même pour les deux cycles, on aura à la fois un meilleur rendement et une plus grande puissance produite par le moteur.

Problème 2 : Etude de quelques éléments d'électroménager.

A. Etude de la trajectoire des électrons dans le magnétron.

1. Dans la base cylindro-polaire : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$; $\boxed{\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z}$; $\boxed{\vec{a}_{M/R} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z}$.
2. La force Lorentz s'exprime : $\boxed{\vec{F}_L = -e\left(\vec{E} + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}\right)}$.
3. On écrit la seconde loi de Newton $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right) = m\vec{a}_{M/R} = \vec{F}_L = -e\left(\vec{E} + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O\right)$

On la projette sur l'axe (Oz) : $m\vec{a}_{M/R}.\vec{e}_z = m\ddot{z}$; $-e\vec{E}.\vec{e}_z = 0$ car $\vec{E} \perp \vec{e}_Z$; $-e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O\right).\vec{e}_z = 0$ car $\vec{B}_O // \vec{e}_Z$

On en conclut que $\ddot{z}(t) = 0$. Avec les conditions initiales $\dot{z}(t) = 0$ puis $\boxed{z(t) = z_O = cste}$

<u>Le mouvement de l'électron se fait donc bien dans un plan normal à l'axe (Oz).</u>

4. On étudie le travail des deux composantes de la force de Lorentz :

Pour le champ magnétostatique $\delta W_{mag} = -e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}\right).d\overrightarrow{OM} = -e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}\right).\vec{v}_{M/R}dt$ alors $\delta W_{mag} = 0$

Pour le champ électrostatique $\delta W_{elec} = -e\vec{E}.d\overrightarrow{OM} = e\dfrac{K}{r}.dr = -d\left(-Ke\ln(r)\right) = -dE_P$

On en déduit avec la convention indiquée que la composante électrostatique est conservative associée à $\boxed{E_P(r) = -Ke\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)}$

<u>La seule force qui travaille étant une force conservative, le système est bien conservatif.</u>

5. On applique le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) à l'électron ce qui donne :

$$\left(\frac{dL_{Oz}}{dt}\right)_R = M_{Oz}\left(\vec{F}_L\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \left(-e\vec{E}\right).\vec{e}_z + \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(-e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O\right)\right)\right].\vec{e}_z$$

Avec $L_{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/R}\right).\vec{e}_z = m\left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}\right].\vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}$; $\overrightarrow{OM} \wedge \left(-e\vec{E}\right).\vec{e}_z = -e\left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\dfrac{K}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].\vec{e}_z = 0$

$-e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O\right) = -e\left[\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_O \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -eB_O r\dot{\theta} \\ eB_O\dot{r} \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(-e\left(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O\right)\right)\right].\vec{e}_z = \left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -eB_O r\dot{\theta} \\ eB_O\dot{r} \\ 0 \end{pmatrix}\right].\vec{e}_z = eB_O\dot{r}r$

Le théorème du moment cinétique par rapport à Oz se traduit par $\dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = eB_O\dot{r}r = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}eB_O r^2\right)$

On en déduit une seconde grandeur conservée, intégrale première du mouvement : $\dfrac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta} - \dfrac{1}{2}eB_O r^2\right) = 0$

A l'aide des conditions initiales, on obtient la grandeur conservée $\boxed{mr^2\dot{\theta} + \dfrac{1}{2}eB_O\left(a^2 - r^2\right) = 0}$

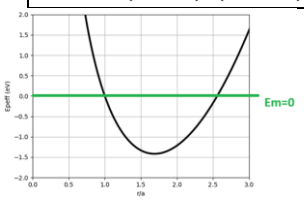
<u>La loi des aires n'est alors pas vérifiée, puisqu'elle résulte la conservation du moment cinétique $L_{Oz} = mr^2\dot{\theta}$ qui n'est pas conservé dans le système étudié.</u>

6. On écrit l'énergie mécanique du système : $\boxed{E_M = E_C + E_P = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - Ke\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)}$

On exploite la q5 pour obtenir $\dot{\theta} = \dfrac{eB_O}{2m}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)$ ce qui donne $\boxed{E_M = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\dfrac{e^2B_O^2}{4m}\right)\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right)^2 - Ke\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)}$

On peut voir l'électron comme associé à l'énergie potentielle effective $\boxed{E_{P,eff} = \left(\dfrac{e^2B_O^2}{4m}\right)\left(r - \dfrac{a^2}{r}\right)^2 - Ke\ln\left(\dfrac{r}{a}\right)}$.

7. La représentation graphique présente l'allure suivante, on place l'énergie mécanique E_M=0 évaluée grace aux conditions initiales données dans l'énoncé et on en déduit qu'on observe un état lié pour lequel l'électron évolue entre le cylindre de rayon r=a et un rayon maximal r_{max}.



8. Pour que les électrons évitent tout contact avec l'électrode extérieure, il faut que le rayon respecte $r \leq b$

On se place dans le cas limite où r_{max}=b, en supposant que la trajectoire tangente cette valeur ce qui entraine qu'en r=b, $\dot{r}=0$ et on en déduit qu'il faut respecter la condition suivante :

$E_M = 0 = \left(\frac{e^2 B_O^2}{4m}\right)\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - Ke\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ce qui donne $\boxed{B_O = \frac{b}{\left(b^2 - a^2\right)}\sqrt{\frac{4m}{e}K\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$

9. On reprend le résultat $\dot{\theta} = \frac{eB_O}{2m}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$ pour écrire $\boxed{\omega_L = \frac{eB_O}{2m}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}$

La fréquence associée est alors $\boxed{f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{eB_O}{4\pi m}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 2,4GHz}$ domaine des ondes radio.

B. Etude du principe des cavités résonnantes.

10. On applique la loi des nœuds en terme de potentiel au point numéro n ce qui donne :

$$\left(\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1}\right)\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right) + \left(\underline{u}_n - \underline{u}_{n+1}\right)\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right) + \left(\underline{u}_n - 0\right) j\Gamma\omega = 0$$

11. On introduit le type de solution envisagée ce qui donne :

$$\left(1 - \exp\left(j\varphi\right)\right)\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right) + \left(1 - \exp\left(-j\varphi\right)\right)\left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right) + j\Gamma\omega = 0$$

puis $2\left(1 - \cos\left(\varphi\right)\right)\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) + \Gamma\omega = 0$ qui donne bien $\boxed{\cos\varphi = 1 - \frac{L\Gamma\omega^2}{2\left(1 - LC\omega^2\right)}}$

12. Puisque la ligne doit boucler sur elle-même, il faut que $\boxed{\underline{u}_O = \underline{u}_N}$

Il faut donc que $\exp\left(jN\varphi\right) = 1 = \exp\left(j2\pi p\right)$ ce qui donne les solutions $\boxed{\varphi_P = 2\pi\frac{p}{N} \text{ où } p \in \left[0; N-1\right]}$

13. Les pulsations pour lesquelles il y a alors résonnance des cavités du magnétron vérifient alors :

$\cos\varphi_P = 1 - \frac{L\Gamma\omega_P^2}{2\left(1 - LC\omega_P^2\right)}$ d'où $L\Gamma\omega_P^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)\right)\left(1 - LC\omega_P^2\right)$

$\left(\Gamma + 2C\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)\right)\right)L\omega_P^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)\right)$ et $\boxed{\omega_P = \sqrt{\frac{2}{L}\frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)}{\Gamma + 2C\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right)\right)}}}$

C. Une expérience dans le four à micro-ondes.

14. On nous dit que dans le four à micro-onde, on observe des ondes stationnaires électromagnétiques qui s'écrivent sous la forme : $s\left(x,t\right) = A\cos\left(2\pi ft\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ avec $\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$ c étant la célérité des ondes électromagnétique dans l'air, assimilé à celle dans le vide $\boxed{c = 3,0.10^8 m.s^{-1}}$

Le lieu où l'amplitude de l'onde est maximale, c'est-à-dire le ventre de l'onde stationnaire donnera lieu à une chauffe plus importante que le lieu où l'amplitude est minimale.

On sait ou on retrouve qu'entre deux ventres successifs, il y a une distance d=λ/2

Avec la photo, on mesure par relation de proportionnalité que $\boxed{d = 150 * \frac{46}{19} = 62mm}$

On en déduit que la fréquence de l'onde électromagnétique dans le four est : $\boxed{f = \frac{c}{2d} = 2,4.10^9 Hz}$

Cette valeur est très proche de la valeur attendue pour un four à micro-onde, réglé sur 2,45GHz.

D. Etude générale d'un congélateur.

15. Le volume intérieur est V_{int}=230L, le volume extérieur est V_{ext}=H*L*P=470L.

Si la paroi est d'épaisseur e faible devant les dimensions, on peut estimer son volume par la relation V_{paroi}=2e*(HL+HP+LP) on obtient finalement $\boxed{e = \frac{V_{ext} - V_{int}}{2\left(HL + HP + LP\right)} = 6,2cm}$

16. Pour le flux thermique $\phi = \frac{\lambda S}{e}\left(T_{ext} - T_{\text{int}}\right)$ avec $S = 2\left(HL + HP + LP\right)$ soit $\boxed{\phi = \frac{\lambda S}{e}\left(T_{ext} - T_{\text{int}}\right) = 47W}$

Pour la puissance consommée par le congélateur $\boxed{P_{élec} = 0,7kWh/\ jour = 29W}$

En fonctionnement stationnaire, le flux thermique reçu à travers les parois est évacué vers le fluide pour maintenir la température du congélateur constante on en déduit $\boxed{\eta_{réel} = \frac{utile}{fourni} = \frac{\phi_{froid}}{P_{elec}} = \frac{\phi}{P_{elec}} = 1,6}$

17. Le premier principe sur une durée δt donne : $U\left(t + \delta t\right) - U\left(t\right) = \delta Q + \delta W$

Le système est de volume constante donc δW=0, le transfert thermique est donné par les fuites ce qui donne δQ=ϕδt, on en déduit $U\left(t + \delta t\right) - U\left(t\right) \xrightarrow{DL1} \frac{dU}{dt}\delta t = \phi \delta t$

Pour les aliments pris dans le modèle PCII $\rho_S V_{\text{int}} c_S \frac{dT}{dt} = \frac{\lambda S}{e}\left(T_{ext} - T\right)$ et $\phi = \frac{\lambda S}{e}\left(T_{ext} - T\right)$

On obtient finalement $\rho_S V_{\text{int}} c_S \frac{dT}{dt} = \frac{\lambda S}{e}\left(T_{ext} - T\right)$ de la forme $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}T = \frac{1}{\tau}T_{ext}$ avec $\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda S}{\rho_S c_s V_{\text{int}} e}}$

18. On résout par la méthode usuelle pour obtenir $\boxed{T(t) = T_{ext} + \left(T_{\text{int}} - T_{ext}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ Le graphe est toujours le même…
19. L'évaluation numérique donne $\boxed{\tau = 3,5.10^5 s = 4,0\ jours}$ cette durée explique pourquoi une coupure de courant d'une heure n'est pas un problème mais une coupure de courant d'une journée oblige à utiliser le contenu du congélateur rapidement.

E. Cycle de fonctionnement de la machine frigorifique.

On modélise le congélateur par une machine frigorifique contenant un fluide frigorigène R134a dont le diagramme (P-h) est donné en annexe de ce sujet. Cette machine ditherme fonctionne entre la source froide à T_{int}=-18°C (intérieur du congélateur) et la source chaude T_{ext}=20°C (extérieur du congélateur).

20. Le cycle idéal est celui de Carnot constitué de :
    - Une compression adiabatique réversible de T_{int} à T_{ext}.
    - Une compression isotherme au contact de T_{ext}.
    - Une détente adiabatique réversible de T_{ext} à T_{int}.
    - Une détente isotherme au contact de T_{int}.

Il est conseillé de dessiner le cycle récepteur de Carnot dans un diag (P,V) pour décrire ensuite ces étapes.

On applique alors le premier et le second principe au système :

$$1^{\text{er}}\ \left(\Delta U\right)_{cycle} = 0 = W + Q_F + Q_C \quad 2^{\text{nd}}\ \left(\Delta S\right)_{cycle} = 0 = 0 + \frac{Q_F}{T_{\text{int}}} + \frac{Q_C}{T_{ext}}$$

L'efficacité de la machine frigorifique étudiée est donnée par $\eta_{Carnot} = \frac{utile}{cout} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{-Q_F - Q_C} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_C}{Q_F}}$

Avec $\frac{Q_C}{Q_F} = -\frac{T_{ext}}{T_{\text{int}}}$, on obtient finalement $\boxed{\eta_{Carnot} == \frac{T_{\text{int}}}{T_{ext} - T_{int}} = 6,7}$

Etude du cycle.

21. Dans la vanne, aucun travail utile n'est fourni et aucun transfert thermique n'est possible. On en déduit par le 1er principe industriel $h_4 - h_3 = 0$ la transformation est isenthalpique.

Dans le compresseur, aucun transfert thermique n'est possible et donc aucune entropie d'échange n'est impliquée, et on suppose qu'il fonctionne de manière réversible donc aucune entropie créée n'apparait.

On en déduit par le 2nd principe industriel $s_2 - s_1 = 0$ la transformation est isentropique.

22. (voir le diagramme).

	P(bars)	T(°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/K/kg)
1	0,87	-30	380	1,75
2	8	~ 40	430	1,75
3	8	30	245	1,15
4	0,87	-30	245	1,20

Pour P_1=P_4, l'échelle log donne : $\log\frac{P_1}{10^{-1}}=\frac{3,2}{6,8}\log\frac{10^1}{10^{-1}}$ d'où $P_1=P_4=10^{-1+\frac{3,2}{6,8}*2}=0,87bars$

Pour les enthalpies, échelle linéaire, par exemple $h_1=100+\frac{7,2}{15,5}*(700-100)=380kJ.kg^{-1}$

23. On applique le 1er principe : Compresseur adiabatique $\boxed{w_{12}'=h_2-h_1=50kJ.kg^{-1}}$

Condenseur passif $\boxed{q_{23}=h_3-h_2=-180kJ.kg^{-1}}$ Evaporateur passif $\boxed{q_{41}=h_1-h_4=130kJ.kg^{-1}}$

24. Pour l'efficacité : $\eta_{cycle}=\frac{utile}{fourni}=\frac{q_{41}}{w_{12}'}$ car on veut prélever une chaleur de la source froide qui la fournit donc au fluide en fournissant du travail à ce fluide.

On obtient alors $\boxed{\eta_{cycle}=\frac{h_1-h_4}{h_2-h_1}=2,7}$ on constate que $\boxed{\eta_{réel}<\eta_{cycle}<\eta_{carnot}}$ce qui est logique puisque la mise en œuvre réelle du cycle n'est pas idéal (compresseur et vanne probablement pas parfaitement calorifugés et compresseur probablement pas réversible) et l'efficacité du cycle réalisé est majorée par celle de Carnot qui est le maximum théorique.

Exploitation supplémentaire du diagramme.

25. Si le compresseur restait adiabatique mais non réversible, l'entropie massique du fluide en sortie serait augmentée car $s^{créée}>0$ en sortie. Le point 2' serait donc situé à droite du point 2, ainsi $h_{2'}>h_2$ et $T_2'>T_2$. On peut en déduire que le travail massique à fournir serait plus grand et que pour un compresseur non réversible l'efficacité diminuerait. Cette conclusion est cohérente avec celle de la q24.
26. (voir le diagramme).

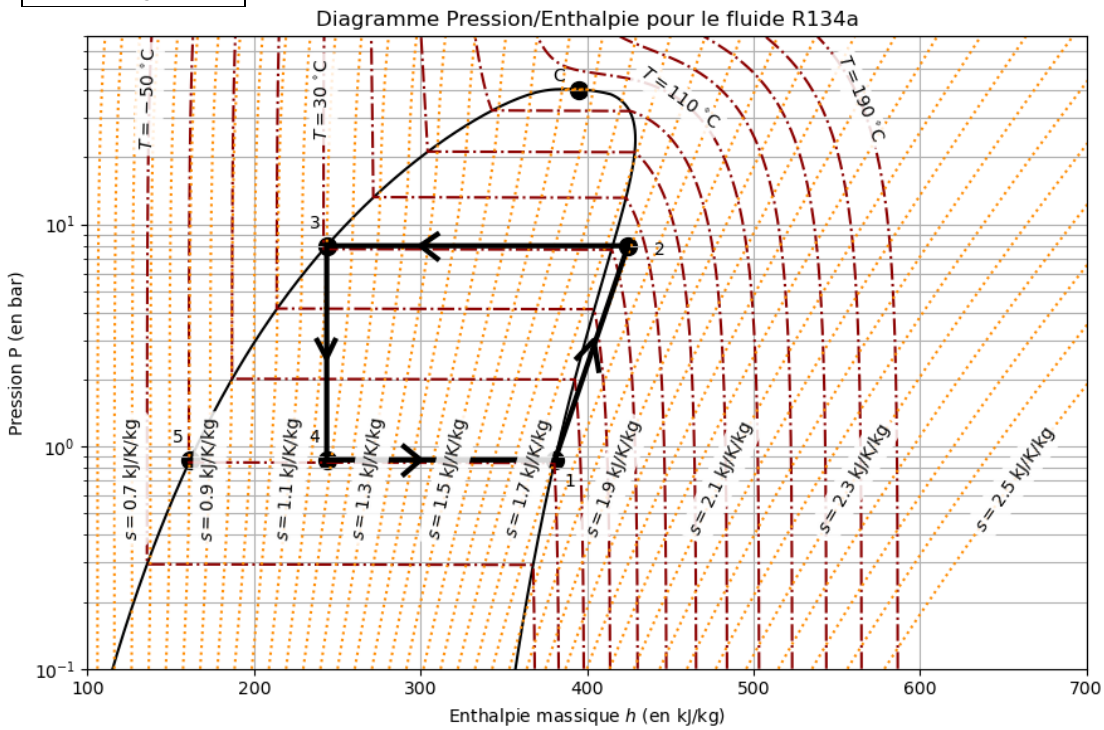
On note 5 le point sur la courbe d'ébullition à la température T_4=-30°C.

27. Pour le point 5 correspondant au liquide saturant $\boxed{h_5=160kJ.kg^{-1}}$.

L'enthalpie massique de vaporisation du fluide R134a est alors $\boxed{\Delta_{vap}h=h_1-h_5=220kJ.kg^{-1}}$

Au point critique, la rosée et l'ébullition se rejoignent, on peut en conclure que l'enthalpie de vaporisation s'annule, il n'y a alors plus de transition de phase liquide vapeur mais on passe à une transition continue d'un fluide dit super-critique.

28. On exploite l'extensivité de l'enthalpie $H_4=H_{liq}+H_{vap}$

On en déduit le système : $\begin{cases}h_4=x_{liq}h_{liq}+x_{vap}h_{vap}\\1=x_{liq}+x_{vap}\end{cases}$ on en déduit $\begin{cases}h_4=(1-x_4)h_{liq}+x_4h_{vap}\\x_{liq}=1-x_4\end{cases}$

Finalement $\boxed{x_4=\frac{h_4-h_5}{h_1-h_5}=0,39}$