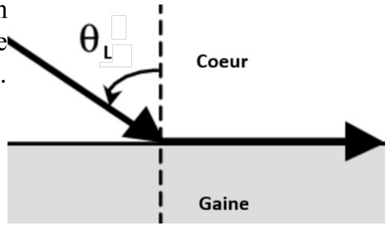
Ondes électromagnétiques : morceaux choisis.

1. Il faut faire l'application numérique avec 3 chiffres significatifs $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}=3{,}00.10^8$

On reconnaît la valeur numérique de la célérité de la lumière dans le vide $\boxed{c=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}=3{,}00.10^8 m\cdot s^{-1}}$

2. Lorsque le rayon lumineux arrive sur l'interface (coeur →gaine ; $n_1>n_2$) on peut mettre en jeu le phénomène de **<u>réflexion totale</u>** ce qui permet de ne produire qu'un rayon réfléchi sans perte de puissance dans un rayon réfracté. **<u>Le rayon lumineux est alors guidé dans le coeur de la fibre</u>**.



On écrit les lois de Snell-Descartes à cette interface $n_1 \sin(\theta)=n_2 \sin(r)$

qui devient dans le cas limite $n_1 \sin(\theta_L)=n_2 \sin(\pi/2)=n_2$

On en déduit la condition pour que le rayon soit guidé $\boxed{\theta \geq \theta_L=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$

On fait l'application numérique $\boxed{\theta_L=1{,}319\, rad=75{,}56\,°=75\,°34\,'}$

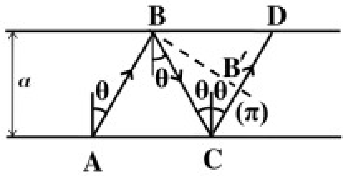
3. On sait qu'il faut vérifier $\theta \geq \theta_L$, dans le triangle rectangle, on sait que $r=\pi/2-\theta$ ce qui donne la condition $r \leq \pi/2-\theta_L$

Dans la loi de Snell Descartes en entrée $\sin(i)=n_1 \sin(r)$ d'où $\sin(i) \leq n_1 \sin(\pi/2-\theta_L)$

On sait que :$\sin(\pi/2-\theta_L)=\cos(\theta_L)=\sqrt{1-\sin^2(\theta_L)}$ on en déduit qu'il faut $\sin(i) \leq \sqrt{n_1^2-n_2^2}$

Il faut finalement que $\boxed{i \leq imax=\arcsin\left(\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right)}$ On calcule alors $\boxed{\sin(i_{max})=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=0{,}3631}$

4. A l'aide du dessin suivant ci contre, on détermine que $\boxed{BC=\frac{a}{\cos(\theta)}}$



La droite (BB') est perpendiculaire à (CD) et à (AB). L'angle entre (AB) et (BC) est de 2θ d'après la loi de Snell-Descartes sur la réflexion. On en déduit que l'angle entre (BC) et (BB') est π/2-2θ. Alors :$\boxed{CB'=BC \sin(\pi/2-2\theta)=BC \cos(2\theta)}$

On en déduit le déphasage $\varphi=\frac{2\pi}{\lambda} n_1 (BC+CB')=\frac{2\pi}{\lambda} n_1 \frac{a}{\cos(\theta)}(1+\cos(2\theta))$

Et puisque $1+\cos(2\theta)=2\cdot\cos^2(\theta)$ on obtient bien finalement $\boxed{\varphi=\frac{4\pi}{\lambda} n_1 a \cos(\theta)}$.

5. On sait que a est le diamètre de la fibre donc [a]=L et que λ est la longueur d'onde donc [λ]=L.

Par définition l'indice optique est sans unité, donc **<u>l'ordre m du mode propre sera un entier sans dimension</u>**.

6. On souhaite qu'il n'y ait qu'un mode m=0 qui se propage, il faut donc que $m_{max}<1$

d'où $\boxed{a<a_{max}=\frac{\lambda}{2\sqrt{n_1^2-n_2^2}}}$, l'application numérique donne $\boxed{a_{max}=2{,}1\, \mu m}$

7. Pour la fibre de la figure 1 de diamètre a=50µm, la propagation dans un seul mode est assurée pour $m_{max}<1$ ce qui donne $\boxed{\lambda>\lambda_{min}=2a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}$ ce qui donne $\boxed{\lambda>36{,}3\, \mu m}$ correspondant aux **<u>rayonnements infrarouge ou de longueur d'onde supérieure (micro onde et onde radio)</u>**.

8. Pour le chemin le plus court θ=0, on obtient une distance parcourue de L et un temps de parcours $t_{min}=n_1 \frac{L}{c}$

Pour le chemin le plus long $\theta=\theta_L$, chaque segment parcouru de longueur d_i correspond à une distance parcourue le long de la fibre de longueur L_i avec $L_i=\frac{d_i}{\cos r_L}=\frac{d_i}{\sin \theta_L}=d_i \cdot \frac{n_1}{n_2}$ En sommant entre l'entrée et la sortie la distance parcourue est $d=L\cdot\frac{n_1}{n_2}$

Alors $t_{max}=\frac{n_1^2}{n_2} \frac{L}{c}$ et on obtient alors $\boxed{\Delta T=t_{max}-t_{min}=\frac{n_1}{n_2} \frac{L}{c}(n_1-n_2)}$ $\boxed{R_{max}=\frac{n_2}{n_1} \frac{c}{L} \frac{1}{n_1-n_2}=6{,}3\cdot 10^6 B/s=7{,}9.10^5 Oct/s}$

9. On observe que a' est le rayon du coeur alors que a est le diamètre donc $\boxed{a=2a'}$

Par lecture graphique, on obtient **<u>n(0)=n$_1$=1,456 et n(a')=n$_2$=1,410</u>**. On retrouve les valeurs de la fibre à saut d'indice.

10. Le terme constant 1 est sans dimension, la dérivée proposée est celle d'une distance par rapport à une distance qui est sans dimension, cette dérivée est donc sans dimension. Les indices optiques et les valeurs de sortie de la fonction sinus sont sans dimension, on en conclut que le terme de droite est sans dimension. **<u>L'équation est bien homogène</u>**.

11. On exploite $\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0=1$ donc $n_1^2\sin^2\theta_0=n_1^2-\sin^2 i$

On obtient $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2=\frac{n_1^2-\left(n_1^2-n_2^2\right)\cdot F\left(\frac{r}{a'}\right)}{n_1^2-\sin^2 i}-1$ ce qui donne alors $\boxed{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2=\frac{\sin^2 i-\left(n_1^2-n_2^2\right)\cdot F\left(\frac{r}{a'}\right)}{n_1^2-\sin^2 i}}$

Au dioptre coeur-Gaine r=a', **F(1)=1** avec la formule fournie et la condition n(r=a')=n$_2$ et $\boxed{\left(\frac{dr}{dz}\right)=0}$ puisque le rayon est maximal en ce point.On en déduit que $\boxed{0=\frac{\sin^2 i-n_1^2+n_2^2}{n_1^2-\sin^2 i}}$ ce qui donne à nouveau l'ouverture numérique $\boxed{\sin(i)=\sqrt{n_1^2-n_2^2}}$

12. On exprime le débit max dans la fibre à gradient d'indice $\boxed{R_{max}^{grad}=\frac{1}{\Delta T'}=\frac{2n_1 c}{\left(n_1-n_2\right)^2 L}}$ puis $\boxed{\frac{R_{max}^{grad}}{R_{max}^{saut}}=\frac{2n_1^2}{n_2\left(n_1-n_2\right)}}$

L'application numérique donne : $\boxed{\frac{R_{max}^{grad}}{R_{max}^{saut}}\approx 65}$ Le débit maximal pour la fibre à gradient d'indice sera environ 65 fois plus grand qu'avec la fibre à saut d'indice classique. Cette performance est encore améliorée dans les fibres à saut d'indice monomode utilisée dans les réseaux de télécommunication moderne.

Résolution de problème : Starlink

On procède à une analyse dimensionnelle des différents éléments exposés dans le sujet et qu'on suppose donc être les paramètres de contrôle de la vitesse du satellite sur sa trajectoire circulaire :

Pour le rayon de la trajectoire R_T, $[R_T]=L$ Pour la masse de la Terre M_T, $[M_T]=M$

Pour la constante de gravitation universelle G : $\vec{F}=-\frac{GM_T m}{d^2}\cdot\vec{u}$

La dimension d'une force se détermine à l'aide de la seconde loi de Newton $\vec{F}=m\cdot\vec{a}$ où $\vec{a}$ est l'accélération du point étudié. On en déduit $[F]=MLT^{-2}$ puis $[G]=M^{-1}L^3T^{-2}$

Pour finir on établit la dimension de la vitesse v par $[v]=LT^{-1}$.

On propose alors une relation de puissance liant v à (R_T, M_T, G) sous la forme $v=k\cdot R_T^\alpha M_T^\beta G^\gamma$

Ce qui donne pour l'analyse dimensionnelle $[v]=[R_T]^\alpha[M_T]^\beta[G]^\gamma$ soit $LT^{-1}=L^\alpha M^\beta\left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\gamma$

On obtient alors le système : $\begin{cases}1=\alpha+3\gamma\\0=\beta-\gamma\\-1=-2\gamma\end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases}\alpha=-1/2\\\beta=1/2\\\gamma=1/2\end{cases}$ on en déduit que $\boxed{v=k\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}}$

Pour l'évaluation numérique, on sait que la gravité à la surface de la Terre donne le poids donc $GM_T=gR_T^2$

Alors $\boxed{v=k\sqrt{g\cdot R_T}}$ avec $g=10\,m.s^{-2}$ et le rayon proche de celui de la Terre $R_T=4.10^4/2\pi\approx 6{,}4\cdot 10^6\,m$ on obtient $\boxed{v\approx 8\cdot 10^3\,m\,s^{-1}}$ ce qui me semble raisonnable mais ferait un beau projectile en rase motte à la surface de la planète !!