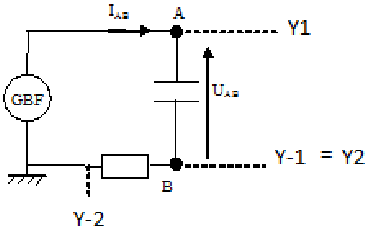
Etude des circuits linéaires du premier ordre.

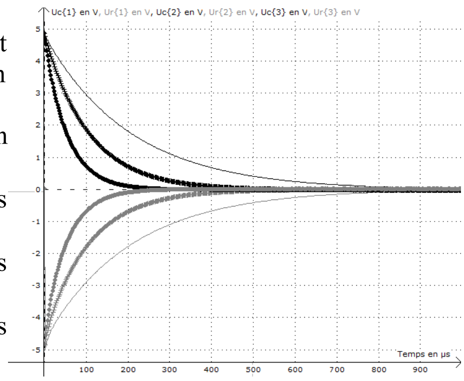
1. Etude du circuit RC.

1.1. Etude expérimentale.



On réalise le circuit de la figure suivante où le GBF est supposé être un générateur idéal délivrant une tension créneau de valeur minimale 0V et de valeur maximale $E_O \approx 5$V.

a. Régime libre.



On observe par acquisition sur l'ordinateur la réponse du circuit consécutive à un front descendant de la f.e.m délivrée par le GBF. On parle dans ce cas de régime libre.
Les courbes relevées à l'ordinateur sont les suivantes, U_C toujours en noir et U_R toujours en gris.

- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des ronds pour R=1,0kΩ et C=0 ,05µF.
- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des croix pour R=1,0kΩ et C=0 ,10µF.
- Courbes continues sans mise en évidence des points expérimentaux pour R=2,0kΩ et C=0 ,10µF.

On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_C aux bornes du condensateur :

- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du condensateur décroit de manière continue de sa valeur avant basculement $U_C(t<0) = E_O$ à une valeur $U_{C\infty} = 0$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension aux bornes du condensateur reste fixe à la valeur $U_{C\infty} = 0$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de $U_C(t)$ par la fonction exponentielle : $U_C(t) = A.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, on obtient les valeurs suivantes pour les paramètres du modèle dans les différentes conditions :

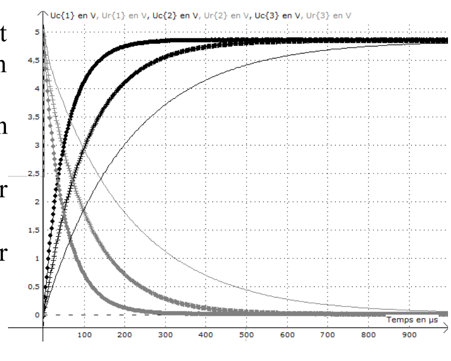
- 1^{ier} cas : R=1,0kΩ et C=0,05µF ; A = 4,86V et $\tau = 5,3.10^{-5}$s.
- $2^{ième}$ cas : R=1,0kΩ et C=0,10µF ; A = 4,84V et $\tau = 1,06.10^{-4}$s.
- $3^{ième}$ cas : R=2,0kΩ et C=0,10µF ; A = 4,83V et $\tau = 2,06.10^{-4}$s.

On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_R aux bornes du conducteur ohmique :

- Une bascule quasiment instantanée de la tension vers une valeur négative de l'ordre de –A alors qu'elle était nulle juste avant.
- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du conducteur ohmique croit de manière continue de la valeur -A à une valeur $U_{R\infty} = 0$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension U_R reste fixe à la valeur $U_{R\infty}$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de $U_R(t)$ par la fonction exponentielle : $U_R(t) = B.\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$, on obtient que $B \approx -A$ et $\tau' \approx \tau$.

b. Réponse à un échelon de tension.



On observe par acquisition sur l'ordinateur la réponse du circuit consécutive à un front montant de la f.e.m délivrée par le GBF. On parle dans ce cas de réponse à un échelon de tension.
Les courbes relevées à l'ordinateur sont les suivantes, U_C toujours en noir et U_R toujours en gris.

- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des ronds pour R=1,0kΩ et C=0 ,05µF.
- Courbes continues avec points expérimentaux représentés par des croix pour R=1,0kΩ et C=0 ,10µF.

- Courbes continues sans mise en évidence des points expérimentaux pour R=2,0kΩ et C=0 ,10µF.

On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_C aux bornes du condensateur :
- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du condensateur croit de manière continue de sa valeur avant basculement $U_C(t<0) = 0$ à une valeur $U_{C\infty} \approx E_O$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension aux bornes du condensateur reste fixe à la valeur $U_{C\infty} \approx E_O$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de U_C(t) par : $U_C(t)=A\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

On obtient les valeurs suivantes pour les paramètres du modèle dans les différentes conditions :

- 1^{ier} cas : R=1,0kΩ et C=0 ,05µF ; A = 4,87V et $\tau = 5,3.10^{-5}$s.
- $2^{ième}$ cas : R=1,0kΩ et C=0 ,10µF ; A = 4,88V et $\tau = 1,06.10^{-4}$s.
- $3^{ième}$ cas : R=2,0kΩ et C=0 ,10µF ; A = 4,84V et $\tau = 2,06.10^{-4}$s.

On observe sur la courbe expérimentale relevée pour la tension U_R aux bornes du conducteur ohmique :
- Une bascule quasiment instantanée de la tension vers une valeur de l'ordre de A alors qu'elle était nulle juste avant.
- Un régime transitoire se déroulant sur une durée Δt au cours duquel la tension aux bornes du conducteur ohmique décroit de manière continue de la valeur A à une valeur $U_{R\infty} = 0$ (en V).
- Un régime permanent pour lequel la tension U_R reste fixe à la valeur $U_{R\infty}$.

On modélise alors la courbe donnant l'évolution de U_R(t) par la fonction exponentielle : $U_R(t)=B\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$, on obtient que B ≈ A et τ' ≈ τ.

c. Conclusion sur ces observations.

Lorsqu'on soumet le circuit RC a une modification de la tension imposée à ses bornes :
- **<u>La tension aux bornes du condensateur est continue lors du basculement de la valeur de la fem.</u>**
- La tension aux bornes du conducteur ohmique et par conséquent l'intensité du courant présente un saut lors du basculement.
- Ces deux tensions évoluent alors vers un régime stationnaire pour lequel la fem du générateur se reporte entièrement aux bornes du condensateur, la tension aux bornes du conducteur ohmique et l'intensité du courant sont nulles.

- **<u>La transition d'un état stationnaire à un autre s'effectue par la mise en place d'un régime transitoire dont la durée caractéristique τ augmente avec la valeur de la résistance R et avec la valeur de la capacité C.</u>**

1.2. Réponse en régime libre du circuit RC.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

On mène l'étude théorique de la première situation analysée précédemment expérimentalement.
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur E_O à la valeur 0.
Sur l'intervalle $t \in]0,+\infty[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $0=U_R(t)+U_C(t)$

On écrit alors les lois de comportement des composants : $U_R(t)=RI(t)$; $I(t)=\frac{dq}{dt}(t)=C\frac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RC : $0=RC\frac{dU_C}{dt}(t)+U_C(t)$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique : $\tau = RC$.

$$\frac{dU_C}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}U_C(t)=0 \qquad \text{avec : } \tau = RC$$

b. Détermination de la solution à cette équation différentielle.

Expérimentalement, on a constaté que :

<u>Propriété</u> : La tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur physique continue (en fonction du temps).

En théorie, la tension aux bornes du condensateur est proportionnelle à la charge portée par les armatures. Une évolution non continue de cette charge supposerait qu'un saut instantané peut être observé sur sa courbe d'évolution et mènerait à une intensité instantanée infinie dans le circuit ce qui est peu crédible physiquement.

On cherche à résoudre le problème suivant :

- sur le domaine temporel t>0 la tension vérifie l'équation différentielle $\frac{dU_C}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}U_C(t)=0$
- La condition initiale à respecter en t=0⁺ est obtenue par continuité de la tension aux bornes du condensateur. $U_C(t=0^+)=U_C(t=0^-)=E_O$

On identifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant d'ordre 1. Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme générale suivante : $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

On détermine alors la constante A en traduisant la condition initiale $U_C(t=0^+)=E_O=A$. On en déduit $E_O=A$.

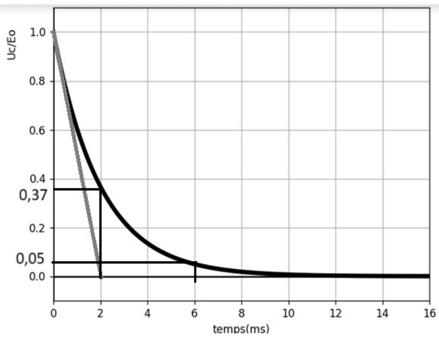
La solution finale est alors : $\forall t\in]0,+\infty[\quad U_C(t)=E_O\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau=RC$

L'intensité dans le circuit s'exprime alors : $\forall t\in]0,+\infty[\quad I(t)=C\frac{dU_C}{dt}=-\frac{E_O}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

c. Tracé de la courbe d'évolution de la tension aux bornes du condensateur au cours du temps.

Lorsqu'on trace la courbe exponentielle décroissante, on met en évidence la droite tangente à l'origine qui passe par les points (t=0 ; tangente=E_O) et (t=τ ; tangente=0) ainsi que les valeurs prises par la fonction en (t=τ, $U_C(\tau)$=0,37E_O) et (t=3τ, $U_C(3\tau)$=0,05E_O.

Ci contre un exemple de tracé de Uc(t)/E_O pour un temps caractéristique τ=2ms.



1.3. Réponse du circuit RC à un échelon de tension.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

On mène à présent l'étude théorique de la seconde situation analysée précédemment expérimentalement.
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur 0 à la valeur E_O.
Sur l'intervalle $t\in]0,+\infty[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $E_O=U_R(t)+U_C(t)$

On écrit les lois caractéristiques des composants : $U_R(t)=RI(t)$; $I(t)=\frac{dq}{dt}(t)=C\frac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RC : $E_O=RC\frac{dU_C}{dt}(t)+U_C(t)$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique : $\tau=RC$.

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}U_C(t)=\frac{E_O}{\tau} \quad \text{avec : } \tau=RC}$$

b. Détermination de la solution.

On cherche à résoudre le problème suivant :

- sur le domaine temporel t>0 la tension vérifie l'équation différentielle $\frac{dU_C}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}U_C(t)=\frac{E_O}{\tau}$
- La condition initiale à respecter en t=0⁺ est obtenue par continuité de la tension aux bornes du condensateur. $U_C(t=0^+)=U_C(t=0^-)=0$

On identifie une équation différentielle linéaire à coefficient constant d'ordre 1 avec un second membre constant

On cherche alors une solution particulière que l'équation complète sous forme d'une constant et on trouve facilement que : $S_P(t)=E_O$

La solution générale de l'équation homogène associée est toujours $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

La solution générale de cette équation est alors $S_G(t)=S_P+S_H(t)=E_O+A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

On détermine alors la constante A en traduisant la condition initiale $U_C(t=0^+)=0=E_O+A$ d'où $A=-E_O$

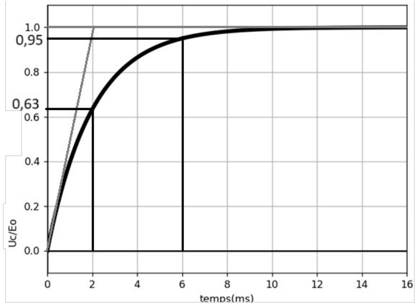
La réponse à un échelon de tension du circuit RC est : $\forall t \in]0,+\infty[\quad U_C(t)=E_O\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

L'intensité dans le circuit s'exprime alors : $\forall t \in]0,+\infty[\quad I(t)=C\frac{dU_C}{dt}=\frac{E_O}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

c. **Tracé de la courbe d'évolution de la tension aux bornes du condensateur au cours du temps.**

Lorsqu'on trace la courbe, on met en évidence la droite tangente à l'origine qui passe par les points (t=0 ; tangente=0) et (t=τ ; tangente=E_O) ainsi que les valeurs prises par la fonction en (t=τ, $U_C(\tau)=0{,}63E_O$) et (t=3τ, $U_C(3\tau)=0{,}95E_O$.

Ci contre un exemple de tracé de $U_c(t)/E_O$ pour un temps caractéristique τ=2ms.



1.4. Etude énergétique pour le circuit RC soumis à un échelon.

Reprenons la loi des mailles dans le circuit : $E_O=U_R(t)+U_C(t)$
On obtient le bilan de puissance pour ce circuit composé d'une seule maille en multipliant la loi des mailles par l'intensité dans le circuit : $\underbrace{E_O I(t)}_{P_{géné}}=\underbrace{U_R(t)I(t)}_{P_{joule}}+\underbrace{U_C(t)I(t)}_{P_{stockée}}$
La puissance fournie par le générateur est consommée d'une part dans le conducteur ohmique et dissipée par effet Joule et stockée d'autre part sous forme d'énergie électrostatique dans le condensateur.
La puissance instantanée fournie par le générateur s'exprime : $P_G(t)=E_O I(t)=E_O.C\frac{dU_C}{dt}(t)$
Et ainsi l'énergie fournie par le générateur pour passer de l'état initial à l'état final est $E_G=\int_{t=0}^{t=+\infty} C E_O\frac{dU_C}{dt}(t)dt=C E_O[U_C]_{t=0}^{t\to+\infty}=CE_O^2$.
D'après la relation vue dans le cours précédent l'énergie stockée dans le condensateur passe de la valeur nulle pour l'état initial pour une tension nulle aux bornes du condensateur à la valeur $E_C=\frac{1}{2}\cdot C E_O^2$ car dans l'état final la tension aux bornes du condensateur est E_O.
Le bilan énergétique sur le régime transitoire entre l'état initial et l'état final s'écrit $E_G=E_{Joule}+E_{stockée}$
On exprime l'énergie dissipée par effet Joule lors de la charge du condensateur $E_{Joule}=E_G-E_{stockée}=\frac{1}{2}C E_O^2$

AD1 : Etude d'un circuit RC en série.
A l'instant $t=t_O$, on branche aux bornes d'un condensateur de capacité C=100nF, un générateur de Thévenin de fem e_O=5V et de résistance interne R=1kΩ.
1. Faire un schéma du circuit.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge q(t) portée par l'armature d'entrée du condensateur sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.

On a mesuré que juste avant de brancher le générateur, la charge portée par l'armature est q_O=100nC.

3. Déterminer l'expression de la charge q(t) sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.
4. Représenter la charge q(t) et définir le temps caractéristique associé à la charge du condensateur.
5. Déterminer l'intensité du courant i(t) dans le circuit.
6. Faire un bilan de puissance dans le circuit. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule lors de la charge du condensateur.

2. Etude du circuit RL.

2.1. Réponse en régime libre du circuit RL.

a. **Etablissement de l'équation différentielle.**
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur E_O à la valeur 0.
Sur l'intervalle $t\in]0,+\infty[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $0=U_R(t)+U_L(t)$
On écrit alors les équations caractéristiques des composants $U_R(t)=RI(t)$; $U_L(t)=L\frac{dI}{dt}(t)$
On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RL : $L\frac{dI}{dt}(t)+RI(t)=0$
On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique du circuit : $\tau=L/R$.

$$\frac{dI}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}I(t)=0 \text{avec : } \tau=L/R$$

b. Détermination de la solution.

<u>Propriété</u> : L'intensité du courant traversant une bobine est une grandeur physique continue (en fonction du temps).

Pour l'expliquer théoriquement, on peut s'appuyer sur l'équivalence avec le cas du condensateur :

- L'intensité traversant le circuit contenant le condensateur est la dérivée de la tension aux bornes de celui-ci. On a vu qu'envisager un saut de tension était physiquement impossible.
- La tension aux bornes de la bobine est la dérivée de l'intensité la traversant. Ceci rendra également impossible l'observation d'un saut de l'intensité traversant la bobine, la tension à ses bornes serait alors infinie.

On cherche à résoudre le problème suivant :

► sur le domaine temporel t>0 l'intensité vérifie l'équation différentielle $\frac{dI}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}I(t)=0$

► La condition initiale à respecter en t=0$^+$ est obtenue par continuité de l'intensité dans la bobine $I(t=0^+)=I(t=0^-)$. On la détermine en étudiant le circuit juste avant extinction et on obtient $I(t=0^-)=E_O/R$

On identifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficient constant d'ordre 1. Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme générale suivante : $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

On détermine alors la constante A en traduisant la condition initiale $I(t=0^+)=E_O/R=A$. On en déduit $E_O/R=A$

La solution finale est alors : $\forall t\in]0,+\infty[\qquad I(t)=E_O/R\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

La tension aux bornes de la bobine s'exprime alors $\forall t\in]0,+\infty[\qquad U_L(t)=L\frac{dI}{dt}=-E_O\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

c. Graphique donnant l'évolution de l'intensité au cours du temps (à vous de jouer).

2.2. Réponse du circuit RL à un échelon de tension.

a. Etablissement de l'équation différentielle.

On mène à présent l'étude théorique de la seconde situation analysée précédemment expérimentalement.
A l'instant t = 0, on suppose que la fem du générateur bascule de la valeur 0 à la valeur E_O.
Sur l'intervalle $t\in]0,+\infty[$, la loi des mailles pour ce circuit s'exprime : $E_O=U_R(t)+U_L(t)$

On écrit alors les équations caractéristiques des composants : $U_R(t)=RI(t)$; $U_L(t)=L\frac{dI}{dt}(t)$

On obtient l'équation différentielle qui régit le comportement du circuit RL : $L\frac{dI}{dt}(t)+RI(t)=E_O$

On met cette équation sous forme canonique en introduisant le temps caractéristique du circuit : $\tau=L/R$.

$$\frac{dI}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}I(t)=\frac{E_O}{R\tau} \qquad \text{avec : } \tau=L/R$$

b. Détermination de la solution.

On cherche à résoudre le problème suivant :

► sur le domaine temporel t>0 la tension vérifie l'équation différentielle $\frac{dI}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}I(t)=\frac{E_O}{R\tau}$

► La condition initiale à respecter en t=0$^+$ est obtenue par continuité de l'intensité dans la bobine. $I(t=0^+)=I(t=0^-)=0$

On identifie une équation différentielle linéaire à coefficient constant d'ordre 1 avec un second membre constant

On cherche alors une solution particulière que l'équation complète sous forme d'une constant et on trouve facilement que : $S_P(t)=E_O/R$

La solution générale de l'équation homogène associée est toujours $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

La solution générale de cette équation est alors $S_G(t)=S_P+S_H(t)=E_O/R+A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

On détermine alors la constante A en traduisant la condition initiale $I(t=0^+)=0=E_O/R+A$ d'où $A=-E_O/R$

La réponse à un échelon de tension du circuit RL est : $\forall t\in]0,+\infty[\quad I=E_O/R\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

La tension aux bornes de la bobine est alors $\forall t\in]0,+\infty[\quad U_L(t)=L\frac{dI}{dt}=E_O\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

2.3. Etude énergétique pour le circuit RL soumis à un échelon.

Si on reprend la loi des mailles dans le circuit : $E_O=U_R(t)+U_L(t)$

Une même intensité circule dans tous les composants. Regardons alors ce qu'on obtient en multipliant la loi des mailles par cette intensité : $E_O I(t)=U_R(t)I(t)+U_L(t)I(t)$

$$P_{géné} \quad = \quad P_{joule} \quad + \quad P_{stockée}$$

La puissance instantanée fournie par le générateur s'écrit : $P_G(t)=E_O I(t)$ Puisque I(t) tend vers une valeur constante en régime stationnaire, il n'est pas vraiment possible de finaliser un bilan énergétique pour ce circuit.
On peut toutefois rappeler que d'après la relation vue dans le cours précédent l'énergie stockée dans la bobine passe de la valeur nulle pour l'état initial pour une intensité nulle dans la bobine à la valeur $E_L=\frac{1}{2}\cdot L\left(E_O/R\right)^2$ car dans l'état final l'intensité traversant la bobine est E_O/R.

AD2 : Etude d'un circuit RL en parallèle.

A l'instant $t=t_O$, on branche aux bornes d'une bobine d'inductance L=100mH, un générateur de Norton d'intensité i_O et de résistance interne R=1kΩ.

1. Faire un schéma du circuit.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i_L(t)$ du courant circulant dans la bobine sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.

Aucun courant ne circulait dans la bobine avant que l'on branche le générateur à ses bornes.

3. Déterminer $i_L(t)$ dans la bobine sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.
4. Représenter l'intensité $i_L(t)$ sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$
5. Déterminer la tension U(t) aux bornes de la bobine.
6. Faire un bilan de puissance. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sur l'intervalle $[t_O,+\infty[$.

Capacités exigibles

- Distinguer graphiquement régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon.
- Déterminer les grandeurs électriques en régime permanent en remplaçant les bobines et les condensateurs par des interrupteurs fermés ou ouverts.
- Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- Déterminer des conditions initiales en utilisant les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur et de l'intensité dans une bobine.
- Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire : graphiquement ou bien par analyse de la solution de l'équation différentielle.
- Réaliser des bilans énergétiques.