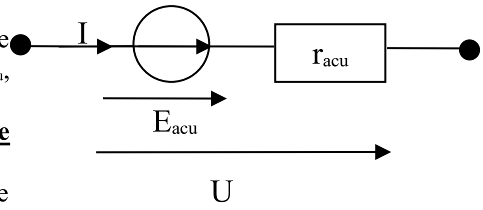
Problème 1 : stockage d'énergie électrique.

A. Batterie d'accumulateurs.



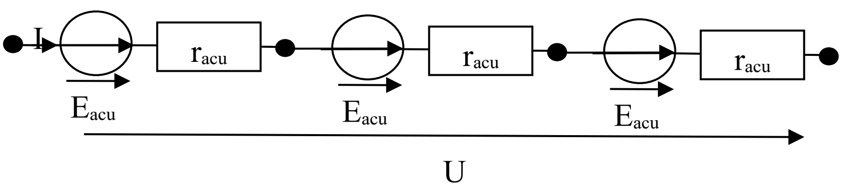
1. On observe que la caractéristique est une droite de pente négative (-a) passant par le point de coordonnées ($u=E_{acu}$, $i=0$).

On l'identifie comme celle **<u>d'un générateur de Thévenin de force électromotrice E_{acu} et de résistance interne r_{acu}</u>**$=1/a$.

2. Le schéma équivalent est ci-contre. et la caractéristique associée est $\boxed{U=E_{acu}-r_{acu}I}$
3. Le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la droite caractéristique donne $\boxed{U(i=0)=E_{acu}=2{,}0\,V}$

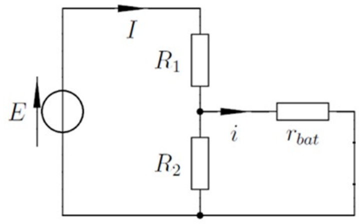
La droite passe par les points (U=1,85V, I=3A) et (U=2,15V, I=-3A) ce qui donne une pente $-a=-20\,A/V$ et une résistance interne $\boxed{r_{acu}=1/a=5{,}0.10^{-2}\,\Omega}$.

4. Pour obtenir une tension maximale à vide, il faut que les fem des accumulateurs s'additionnent, on doit alors les disposer en série en prenant garde de les « monter tous dans le même sens ». On donne la représentation de cette association avec 3 accumulateurs ci contre.



On obtient par l'association en série des différents éléments $\boxed{E_{bat}=n_{acu}E_{acu}=12\,V}$ et $\boxed{r_{bat}=n_{acu}r_{acu}=3{,}0.10^{-1}\,\Omega}$

5. Lorsque la batterie est totalement déchargée et que e_{bat} est nulle, la batterie est équivalente à un simple résistor de résistance r_{bat}.
6. Le circuit redessiné est donné ci-contre.



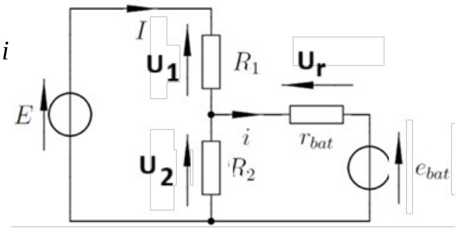
Pour la résistance équivalente, On associe R_2 et r_{bat} en parallèle $\frac{1}{R_{//}}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{r_{bat}}$

Puis on l'associe à R_1 en série $R_{eq}=R_{//}+R_1$ On obtient $\boxed{R_{eq}=R_1+\frac{R_2 r_{bat}}{R_2+r_{bat}}}$

7. L'intensité débitée par la source est $\boxed{I=\frac{E}{R_{eq}}=E\frac{R_2+r_{bat}}{R_1R_2+R_1r_{bat}+R_2r_{bat}}}$

Par un diviseur de courant, on obtient $\boxed{i_O=\frac{R_2}{R_2+r_{bat}}I=E\frac{R_2}{R_1R_2+R_1r_{bat}+R_2r_{bat}}}$ A.N $\boxed{i_O=6{,}6\,V}$

8. On écrit les loi des mailles $E=U_1+U_2$ et $U_2=e_{bat}+U_r$



La loi des nœuds $I=i_2+i$ et les lois d'Ohm $U_1=R_1I;U_2=R_2I_2;U_r=r_{bat}i$

On obtient alors $E=R_1(i+i_2)+R_2i_2$ et $R_2i_2=e_{bat}+r_{bat}i$

On en déduit $i_2=\frac{e_{bat}+r_{bat}i}{R_2}$ puis $E=R_1i+\frac{R_1+R_2}{R_2}(e_{bat}+r_{bat}i)$

Ce qui donne $E-\frac{R_1+R_2}{R_2}e_{bat}=\frac{R_1R_2+R_1r_{bat}+R_2r_{bat}}{R_2}i$

Finalement on obtient bien $\boxed{i=\frac{R_2E-(R_1+R_2)e_{bat}}{R_1R_2+R_1r_{bat}+R_2r_{bat}}}$

9. On étudie $\boxed{i=0=\frac{R_2E-(R_1+R_2)(e_{bat})_{i=O}}{R_1R_2+R_1r_{bat}+R_2r_{bat}}}$ correspondant à $\boxed{(e_{bat})_{i=O}=\frac{R_2E}{R_1+R_2}}$ A.N $\boxed{(e_{bat})_{i=O}=11{,}4\,V}$

Cette fem de la batterie correspond à une fem par accumulateur de 1,90V et un pourcentage de charge de chaque accumulateur égal à 10% d'après la première figure de l'énoncé.

10. Lorsque la batterie est chargée à 100%, la fem d'un accumulateur est de E_{acu}=2,5V, et la fem de la batterie est de e_{bat}=15V. Il faut alors que $\boxed{R_2=R_1\frac{(e_{bat})_{i=O}}{E-(e_{bat})_{i=O}}=30\,\Omega}$

B. Utilisation d'un condensateur

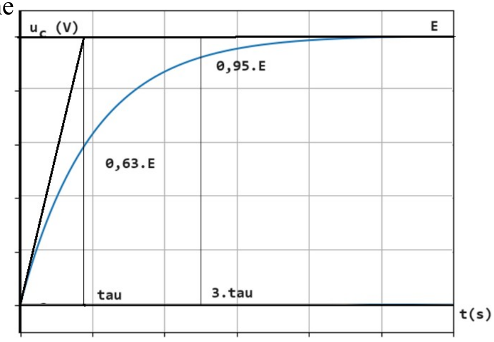
11. Le condensateur est considéré déchargé, la tension à ses bornes est nulle. $\boxed{u_C(t=0^-)=0}$
12. La tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue donc $\boxed{u_C(t=0^+)=u_C(t=0^-)=0}$.
13. On écrit la loi des mailles $E=u_R+u_C$, la loi d'Ohm $u_R=Ri$, et l'équation caractéristique $i=C\frac{du_C}{dt}$

On obtient alors l'équation différentielle $E=u_C+RC\frac{du_C}{dt}$

On la met sous forme canonique $\boxed{\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{1}{\tau}E}$ où $\boxed{\tau=RC}$

14. La solution générale de cette équation est de la forme $S_G=S_P+S_H$ Où $S_P=E$ et $S_H=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Ce qui donne $S_G=E+A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ La condition initiale donne $u_C(t=0^+)=0=E+A$ On obtient $\boxed{u_C(t)=E\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$



15. On obtient la courbe ci contre.
16. On cherche t_1 tel que $u_C(t_1)=0{,}99\,E$ alors $\boxed{t_1=\tau\ln(100)}$
17. Dans l'état final est $\boxed{E_C(t_\infty)=\frac{C}{2}E^2}$.
18. On obtient le bilan de puissance $\begin{array}{l} E.i=u_R.i+u_C.i \\ P_G=P_{Joule}+P_{stock}\end{array}$

Où P_G est la puissance fournie par le générateur, P_{Joule} la puissance dissipée par effet Joule dans le résistor et P_{Stock} la puissance permettant de stocker de l'énergie dans le condensateur.

19. On intègre la relation précédente entre l'état initial (t=0) et l'état final (t⟶+∞).

$\int_{t=0}^{+\infty}P_G\,dt=\int_{t=0}^{+\infty}P_{Joule}\,dt+\int_{t=0}^{+\infty}P_{Stock}\,dt$ ce qui donne $\int_{t=0}^{+\infty}E.i(t)dt=E_{Joule}+\int_{t=0}^{+\infty}u_C(t)i(t)dt$

L'expression de i(t) en fonction de $u_C(t)$ permet de réécrire

$\int_{t=0}^{+\infty}E.C\frac{du_C}{dt}(t)dt=E_{Joule}+\int_{t=0}^{+\infty}\frac{C}{2}\frac{du_C^2}{dt}(t)dt$ on en déduit $CE^2=E_{Joule}+\frac{1}{2}CE^2$ et on obtient $E_{Joule}=\frac{1}{2}CE^2$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule et l'autre moitié est stockée dans le condensateur.

20. Par le même raisonnement qu'aux questions 11. et 12. $\boxed{u_C(t=0^+)=u_C(t=0^-)=0}$
21. On écrit la loi des mailles $E=u_R+u_C$ et la loi des nœuds $i=i_f+i_C$

On écrit les relations constitutives $U_R=Ri$; $U_c=R_f i_f$ et $i_C=C\frac{du_C}{dt}$

On obtient : $E=R(i_f+i_C)+u_C=\left(\frac{R}{Rf}+1\right)u_C+RC\frac{du_C}{dt}$ soit $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{C}\left(\frac{R+R_f}{RR_f}\right)u_C=\frac{E}{RC}$

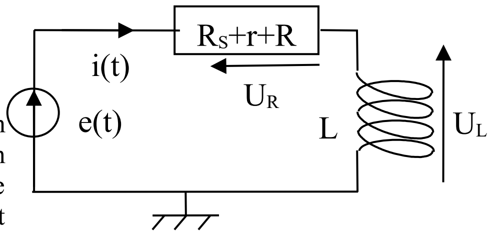
Ce qui donne sous forme canonique : $\boxed{\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau'}u_C=\frac{R_f}{R+R_f}\frac{E}{\tau'}}$ avec $\boxed{\tau'=\frac{R_f R}{R+R_f}C}$

22. Par la même méthode qu' à la question $\boxed{u_C(t)=\frac{R_f}{R+R_f}E\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right]}$
23. La charge obtenue est $\boxed{E_C(t_\infty)=\frac{C}{2}\left(\frac{R_f}{R+R_f}E\right)^2}$.
24. En étudiant le circuit en régime stationnaire avec le condensateur chargé, on obtient $i_{R_f}(\infty)=i(\infty)=\frac{E}{R+R_f}$ $\boxed{i_f(t_\infty)=i(t_\infty)=\frac{E}{R+R_f}}$

La puissance dissipée par effet Joule **lorsque la charge est terminée** est alors $\boxed{P_{Joule}=R_f i_f^2=\frac{R_f}{(R+R_f)^2}E^2}$

L'application numérique donne $\boxed{P_{Joule}=1{,}4.10^{-5}\,W}$ cette puissance est très faible.

Problème 2: Etude d'une bobine réelle.



1. Mise en œuvre dans un circuit RL.

1. Schéma du montage donné ci contre.
2. On étudie le circuit en régime stationnaire avec une fem nulle en entrée et la bobine remplacée par un fil. On trouve alors que la tension aux bornes de la résistance équivalente est nulle et par la loi d'Ohm on obtient $\boxed{i(t=0^-)=0}$.

On en déduit par continuité de l'intensité traversant une bobine $\boxed{i(t=0^+)=i(t=0^-)=0}$

3. En régime stationnaire avec une fem E, on remplace la bobine par un fil dans le schéma et on obtient par la loi d'Ohm et la loi des mailles dans le circuit $\boxed{i(t\to\infty)=\frac{E}{r+R_S+R}}$
4. On écrit la loi des mailles $E=U_R(t)+U_L(t)$

On écrit les lois constitutives $U_R(t)=(r+R_S+R)i(t)$; $U_L(t)=L\frac{di}{dt}(t)$

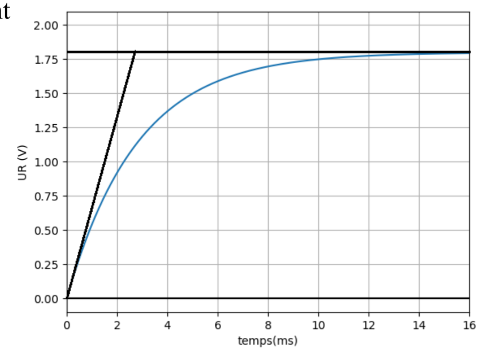
pour obtenir l'équation différentielle $\boxed{\frac{di}{dt}(t)+\frac{1}{\tau}i(t)=\frac{1}{\tau}\frac{E}{r+R_S+R}}$ avec $\boxed{\tau=\frac{L}{r+R_S+R}}$

5. La solution générale de l'équation homogène est : $f(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

   Une solution particulière de l'équation complète est : $f_P(t)=i_O$

   La solution recherchée est donc de la forme : $f(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+i_O$

   On utilise la continuité de l'intensité du courant traversant une bobine pour établir



$\boxed{i(t)=i_O\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$ et $\boxed{u_R(t)=\frac{RE}{R+R_S+r}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$

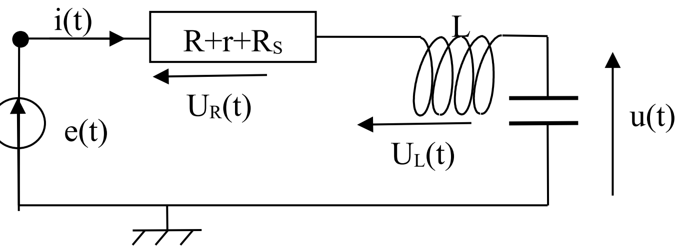
6. On lit sur le graphique $\boxed{u_{max}=\frac{RE}{R+R_S+r}\approx 1{,}8\,V}$

d'où $\boxed{r=R\left(\frac{E}{u_{max}}-1\right)-R_S}$ A.N $\boxed{r=1{,}3.10^2\,\Omega}$

7. On lit $\tau=\frac{L}{r+R_S+R}\approx 2{,}7\,ms$

   D'où $\boxed{L=\tau(r+R_S+R)}$ A.N $\boxed{L=0{,}76\,H}$

2. Mise en œuvre dans un circuit RLC.



8. Schéma du second circuit :
9. Lors du régime stationnaire

Le condensateur est un interrupteur ouvert $\boxed{i(t=0-)=0}$. La bobine est équivalente à un fil et le conducteur ohmique présente une tension nulle d'après la loi d'Ohm. La loi des mailles amène à la conclusion $\boxed{u(t=0-)=0}$

La continuité de la tension aux bornes d'un condensateur amène à $\boxed{u(t=0+)=0}$ et la continuité de l'intensité traversant une bobine amène à $\boxed{i(t=0+)=0}$.

10. Lorsqu'on atteint le régime stationnaire, la tension aux bornes du condensateur est constante et donc l'intensité qui y circule est nulle, ce qui permet de dire que $\boxed{i(t\to+\infty)=0}$. Par la loi des mailles et applications des lois de comportement des composants on obtient alors $\boxed{u(t\to+\infty)=E}$
11. On écrit la loi des mailles $E=U_R(t)+U_L(t)+u(t)$

On écrit les lois pour les composants $U_R(t)=(r+R+R_S)i(t)U_L(t)=L\frac{di}{dt}(t)$;$i(t)=C\frac{du}{dt}(t)$

On aboutit à : $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2}(t)+\frac{\omega_O}{Q}\frac{du}{dt}(t)+\omega_O^2u(t)=\omega_O^2E(t)}$ avec :$\boxed{\omega_O=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q=\frac{1}{(R+r+R_S)}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

12. **<u>On observe un régime pseudo-périodique</u>**. Le polynôme caractéristique est $r^2+\frac{\omega_O}{Q}r+\omega_O^2$

Les deux racines sont $r_\pm=-\frac{\omega_O}{2Q}\pm j\frac{\omega_O}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}=-\frac{1}{\tau_2}+j\omega_P$

La solution générale de l'équation homogène est $S_H(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(A_1\cos(\omega_P t)+A_2\sin(\omega_P t)\right)$

Une solution particulière de l'équation complète est : $S_P(t)=E$

La solution générale est de la forme $S_G(t)=E+\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(A_1\cos(\omega_P t)+A_2\sin(\omega_P t)\right)$

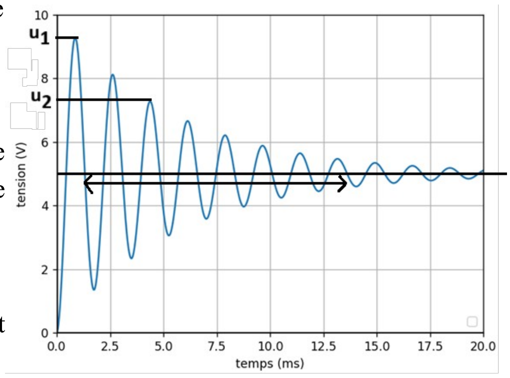
Les CI à vérifier sont : $u(t=0+)=0=E+A_1$ $\quad\quad i(t=0+)=0=C\frac{du}{dt}(0+)=-\frac{1}{\tau_2}A_1+\omega_P A_2$

On obtient finalement :$S_G(t)=E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(\cos(\omega_P t)+\frac{1}{\omega_P\tau_2}\sin(\omega_P t)\right)\right)$

13. On obtient en substituant $\delta=\frac{1}{N}\ln\left(\frac{E\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\left(\cos(\omega_P t)+\frac{1}{\omega_P\tau_2}\sin(\omega_P t)\right)}{E\exp\left(-\frac{t+NT}{\tau_2}\right)\left(\cos(\omega_P(t+NT))+\frac{1}{\omega_P\tau_2}\sin(\omega_P(t+NT))\right)}\right)$

La périodicité de la fonction sinusoïdale permet de simplifier en $\delta=\frac{1}{N}\ln\left(\exp\left(\frac{NT}{\tau_2}\right)\right)=\frac{T}{\tau_2}$

En remplaçant T et τ_2 par leurs expressions on obtient bien $\boxed{\delta=\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$ lorsque Q est grand $\boxed{\delta\approx\frac{\pi}{Q}}$



14. On mesure sur le graphique à l'aide d'une loi d'échelle $u_1=9{,}2\,V$; $u_2=7{,}3\,V$; $u_\infty=5{,}0\,V$

On en déduit le $\boxed{\delta=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4{,}2}{2{,}3}\right)=0{,}30}$ puis $\boxed{Q=\frac{\pi}{\delta}=10}$.

15. On mesure sur le graphique $7T_P=12\,ms$ ce qui donne une pseudo-période $\boxed{T_P=1{,}7\,ms}$ ce qui donne $\boxed{\omega_O=\frac{2\pi}{T_P}\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}}=3{,}6.10^3\,rad.s^{-1}}$

16. On en déduit $\boxed{L=\frac{1}{C\omega_O^2}=0{,}77\,H}$ et $r=\frac{1}{CQ\omega_O}-(R+R_S)=1{,}3.10^2\,\Omega$

Les valeurs obtenues sont cohérentes avec celles obtenues en première partie.

Résolution de problème : Charge par paliers successifs.

La tension aux bornes du condensateur passe de $u_{C,k}=k\frac{E}{N}$ à $u_{C,k+1}=(k+1)\frac{E}{N}$ lorsque la fem est $E_k=(k+1)\frac{E}{N}$

l'énergie fournie par le générateur s'écrira $E_{Fournie,k}=\int_{t=0}^{+\infty}E_k I(t)dt=\int_{t=0}^{+\infty}(k+1)\frac{E}{N}C\frac{du_C}{dt}dt=(k+1)\frac{CE^2}{N^2}$

L'énergie totale fournie lors des N charges (k=0 à N-1) est alors $E_{Fournie}=\sum_{k=0}^{N-1}E_{Fournie,k}=\frac{CE^2}{N^2}\sum_1^N k=CE^2\frac{N+1}{2N}$

L'énergie stockée dans le condensateur au cours des charges est $E_{Stockée}=\frac{CE^2}{2}$

On en déduit le rendement $\rho=\frac{E_{stockée}}{E_{Fournie}}=\frac{N}{N+1}$

On souhaite que ce rendement dépasse 90 % il faut donc que $\frac{N}{N+1}\geq 0{,}9$ ce qui donne $N\geq 9$

Conclusion : il faut au minimum 9 paliers pour réaliser la charge du condensateur avec un rendement total supérieur à 90 %. En pratique, on charge le condensateur à l'aide d'une fem variant linéairement au cours du temps avec un temps caractéristique T>>τ=RC