Signaux périodiques et filtrage.

1. Signaux périodiques et analyse de Fourier.

1.1. Rappel théorique.

La théorie de Fourier affirme que tout signal périodique f(t) de période $T=2\frac{\pi}{\omega_F}$ peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier : $f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(k\omega_F t+\varphi_k)$

Pour laquelle :

- Le terme de rang nul (k=0) c'est-à-dire c_O est la moyenne du signal périodique étudié.
- le terme de rang un est nommé le fondamental et $\omega_F=2\pi/T$ est la pulsation du fondamental.
- chacun des termes de rang k de pulsation $\omega_k=k\,\omega_F$ est appelé harmonique de rang k du signal.

Quelques exemples, signal créneau.

Pour un signal créneau impair d'amplitude A et de valeur moyenne s_O, la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante : $s_{créneau}(t)=\langle s_{créneau}\rangle_T+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4A}{2k+1}\sin((2k+1)\omega_F t)$.

On notera que dans cette décomposition :

- La **valeur moyenne** est donnée par la composante constante de fréquence nulle.
- Il y a un signal **fondamental** (k=0).
- Il y a en théorie une infinité d'harmoniques **impaires**.

Quelques exemples, signal triangle.

Pour un signal triangle pair d'amplitude A et de valeur moyen s_O, la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante : $s_{tri}(t)=\langle s_{tri}\rangle_T+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8A}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)\omega_F t)$.

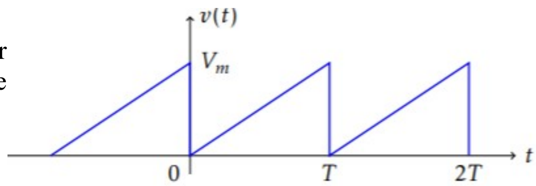
On notera que dans cette décomposition :

- La **valeur moyenne** est donnée par la composante constante de fréquence nulle.
- Il y a un signal **fondamental** (k=0).
- Il y a en théorie une infinité d'harmoniques **impaires**.

Quelques exemples, signal dents de scie.

Pour un signal dents de scie de valeur minimale nulle de valeur maximale V_m (voir graphe ci contre), la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante :

$$s_{scie}(t)=\frac{V_m}{2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{V_m}{\pi k}\cos(k\omega_F t)$$



1.2. Analyse de Fourier de signaux produit par le GBF.

On va illustrer ce principe de décomposition en série de Fourier à l'aide du GBF qui produira un signal acquis et analysé sur l'ordinateur à l'aide du logiciel Latis-Pro.

- Connecter directement le GBF sur l'oscilloscope et réaliser l'observation d'un signal dent de scie de valeur minimale nulle, de valeur maximale V_m=5V et de fréquence 500Hz.
- Effectuer l'acquisition de ce signal sur une durée correspondant à environ 3 ou 4 périodes en réglant le nombre de points acquis sur 1000.
- Vérifier grâce aux outils du logiciel que le signal acquis présente les bonnes caractéristiques (valeurs minimale, valeur maximale et période/fréquence).
- Dans le menu traitement, réaliser l'analyse de Fourier et afficher le spectre obtenu ainsi que le tableau des valeurs donnant les amplitudes des composantes de ce spectre.
- Vérifier que les amplitudes des composantes sont bien celles prédites par la théorie de Fourier.

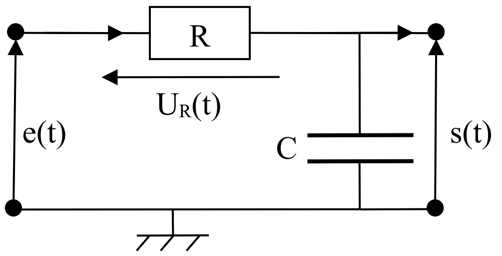
On va maintenant illustrer le principe de reconstruction du signal à partir de la série de Fourier tronquée qui ne comporte que les composantes de rang les plus faibles.

- Dans le menu traitement, puis calculs spécifiques, sélectionner l'option synthèse harmonique.
- Faire glisser la courbe donnant le signal dent de scie en fonction du temps dans la case courbe et lancer le calcul en cliquant sur la case correspondante.
- Afficher alors sur l'écran le signal et sa reconstruction harmonique, ainsi que le tableau donnant les fréquences, les amplitudes de chaque composante pour le signal dent de scie et pour sa reconstruction.
- Réaliser la somme partielle en ajoutant ou supprimant des harmoniques et observer comment le signal se reconstruit au fur et à mesure de l'ajout d'harmoniques.

- Vérifier qu'en modifiant certaines amplitudes, on « détruit » rapidement la reconstruction du signal.
- En quels points le signal dent de scie est-il « mal » reconstruit ?

2. Etude du filtre RC.

2.1. Rappel théorique.



Détermination de la fonction de transfert :

Diviseur de tension : $\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_O}}$

avec : $f_O = \frac{1}{2\pi RC}$

Expression du gain en décibel et de la phase :

Le gain est le module de la fonction de transfert : $G(f) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_O}\right)^2}}$

Le gain en décibel : $G_{dB}(f) = 20.\log G(f) = -10\log\left(1+\left(\frac{f}{f_O}\right)^2\right)$ la phase : $\varphi = -\arctan\left(\frac{f}{f_O}\right)$

2.2. Etude expérimentale.

Choix des valeurs des composants dans le circuit :

On souhaite fixer la fréquence propre du circuit à f_O = 1,0 kHz pour une capacité du condensateur de 0,1µF.

- Déterminer la valeur de la résistance R à employer dans le circuit. Quelles remarques peut-on faire sur la valeur de cette résistance vis-à-vis de la mise en œuvre du circuit en pratique ?

Construction du diagramme de Bode :

- Réaliser le circuit pour mener l'étude du diagramme de Bode en amplitude et en phase en utilisant l'oscilloscope en mode numérique pour effectuer le suivi des tensions e(t) et s(t).
- Effectuer alors les mesures expérimentales et construire le diagramme de Bode sur le domaine de fréquences [f_O/100, 100.f_O].

Pour effectuer la mesure du gain, on fera afficher à l'oscilloscope les valeurs de tensions Crête à Crête des deux voix.
Pour effectuer la mesure du déphasage, on déterminera à l'aide des curseurs verticaux de l'oscilloscope le retard t_O du signal s(t) par rapport au signal e(t). On appliquera alors la formule déjà vue précédemment donnant le déphasage $\phi = -2\pi f t_O$.

Tableau type à construire (pour donner une idée, ne pas reproduire strictement ce tableau pendant le TP) :

f (Hz)	E_{CC} (V)	S_{CC} (V)	t_O (s)	Log(f)	G_{dB}(f)	φ(f) (rad)
$1,0.10^1$	5,0	5,0	0	1	0	0
…	…	…	…	…	…	…
$1,0.10^5$	5,0	$5,0.10^{-2}$		5	-40	-1,57 soit –π/2

- Tracer le diagramme de Bode en amplitude et en phase sur la feuille de papier semi log à disposition, en réfléchissant à la répartition des points pour :
  - Obtenir rapidement le comportement asymptotique BF,
  - Obtenir rapidement le comportement asymptotique HF,
  - Vérifier que la fréquence propre du filtre correspond bien à la fréquence de coupure.
  - Obtenir des détails suffisants sur la zone de transition.

2.3. Effet du filtre sur un signal créneau.

On règle maintenant le GBF pour qu'il alimente le filtre avec un signal créneau d'amplitude E=5V de valeur moyenne E_O=2V.

Comportements asymptotiques :

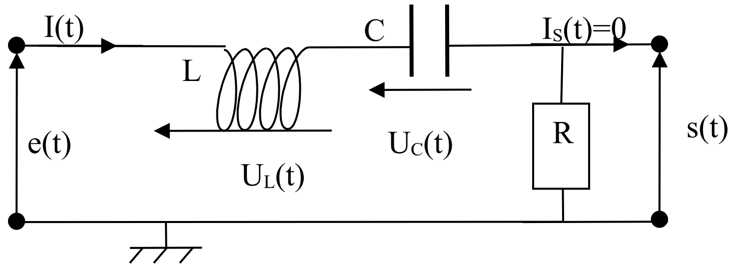
- Régler la fréquence du signal pour observer le caractère « suiveur » du filtre sur le domaine basse fréquence.
- Régler la fréquence du signal pour observer le caractère « intégrateur » du filtre sur le domaine haute fréquence.
- ➢ Quelle remarque peut-on faire sur l'amplitude du signal obtenu en sortie ? comment peut-on améliorer la situation ?
- ➢ Quelle remarque peut-on faire pour la composante continue du signal ?

Comportement général :

- Régler la fréquence fondamentale du signal créneau sur la valeur 500Hz.
- Faire alors l'acquisition simultanée à l'ordinateur des signaux produits par le GBF et en sortie du filtre sur une durée d'acquisition permettant de relever les courbes sur 2 à 3 périodes (à nouveau on prendra une acquisition sur 1000 points).
- Effectuer alors l'analyse de Fourier de ces deux signaux.
- ➢ Vérifier que les composantes du signal créneau sont biens données par la formule théorique donnée en début d'énoncé.
- ➢ Vérifier que l'amplitude des harmoniques en sortie est donnée par la relation générale toujours valable pour un filtre linéaire : $c_{s,n}=c_{e,n}.g\left(f_n\right)$ en utilisant le tableur de latis-pro et la feuille de calcul.

3. Etude de la fonction de transfert du filtre LC(R).

3.1. Rappel théorique.



<u>Détermination de la fonction de transfert :</u>

Diviseur de tension : $\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}=\underline{H}(jx)=\frac{H_O}{1+jQ\left(\frac{f}{f_O}-\frac{f_O}{f}\right)}$ avec : $f_O=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

<u>Expression du gain en décibel et de la phase :</u>

Le gain est le module de la fonction de transfert : $G(f)=\frac{|H_O|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_O}-\frac{f_O}{f}\right)^2}}$

Le gain en décibel : $G_{\text{dB}}(\omega)=20\log|\underline{H}(j\omega)|=20\log|H_O|-10\log\left(1+Q^2\left(\frac{f}{f_O}-\frac{f_O}{f}\right)^2\right)$

la phase : $\varphi(\omega)=\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)=\arg\left(H_O\right)-\arctan\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$

3.2. Etude expérimentale.

<u>Choix des valeurs des composants dans le circuit :</u>

- Commencer par régler la bobine disponible sur votre paillasse sur la valeur 1,0H.

On souhaite fixer la fréquence propre du circuit à f_O = 2,0 kHz.

- ➢ Déterminer la valeur qu'il faut donner à C pour remplir cette condition.

On souhaite obtenir un facteur de qualité de 5.

- ➢ Déterminer la valeur de la résistance R à employer dans le circuit.
- ➢ Quelles remarques peut-on faire sur la valeur de cette résistance vis-à-vis de la mise en œuvre du circuit en pratique ?

Construction du diagramme de Bode :

- Réaliser le circuit pour mener l'étude du diagramme de Bode en amplitude et en phase en utilisant l'oscilloscope en mode numérique pour effectuer le suivi des tensions e(t) et s(t).
- Effectuer alors les mesures expérimentales et construire le diagramme de Bode sur le domaine de fréquences $[f_O/100, 100.f_O]$.
- On tracera d'abord le diagramme de Bode en amplitude et en phase sur le logiciel de son choix, en réfléchissant à la répartition des points pour :
  - Obtenir rapidement le comportement asymptotique BF,
  - Obtenir rapidement le comportement asymptotique HF,
  - Obtenir rapidement les fréquences de coupure et vérifier que la bande passante présente la largeur attendue f_O/Q.
  - Obtenir des détails suffisants sur la zone de transition.

Matériel :

— Générateur basses fréquences (GBF)
— Oscilloscope numérique
— LC-mètre (2)
— 1 Boîte à décades de résistors
— 1 Boîte à décades de condensateurs
— 1 Bobine variable
— Plaque pour boîtiers
— Carte d'acquisition CAMPUS
— Logiciel Latis-Pro et Régressi

Capacités :

- Fonction de transfert harmonique, diagramme de Bode.
- Décalage temporel/Déphasage à l'aide d'un oscilloscope numérique.
- Mesurer une tension : mesure directe à l'oscilloscope numérique.
- Élaborer un signal électrique périodique simple à l'aide d'un GBF.
- Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes :
  - amplification, filtrage
  - intégration
- Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'une carte d'acquisition ou sa synthèse.