Description et paramétrage du mouvement d'un point.

Introduction.

La mécanique est la science de l'étude du mouvement des corps. Elle se décompose en deux parties :

- La cinématique désigne l'ensemble des outils nécessaires pour décrire le mouvement de manière formelle.
- La dynamique désigne l'ensemble des lois permettant d'étudier les causes du mouvement observé.

Il est important de bien distinguer ces deux étapes dans les études mécaniques. Elles sont aussi essentielles l'une que l'autre. Dans ce premier chapitre, on ne se soucie donc que de décrire le mouvement d'un système sans se soucier des causes de ce mouvement.

1. Description du point de vue d'un observateur.

1.1. Relativité du mouvement.

Prenons le cas d'un passager assis dans un train lancé sur les rails à pleine vitesse entre Paris et Marseille.

- Selon le point de vue de ce passager, il est immobile par rapport au train, sa position est fixe dans le temps, son vecteur vitesse et son vecteur accélération sont nuls.
- Selon le point de vue d'un ruminant situé dans un champ le long de la voie ferrée, le train et, par conséquent, le passager sont en mouvement, le vecteur position du passager évolue au cours du temps, son vecteur vitesse est non nul et son vecteur accélération peut ne pas être nul.
- Le passager et le ruminant sont deux observateurs qui décrieront le mouvement d'un même objet d'étude de manière différente car leurs points de vue sont différents.

<u>Conclusion :</u> Le **mouvement** d'un objet est une **notion relative** au point de vue adopté, la première précaution à prendre dans une étude cinématique est de préciser le **<u>point de vue adopté</u>** en spécifiant le **<u>référentiel</u>** dans lequel on réalise cette description.

1.2. Définition d'un référentiel.

a. <u>Repère.</u>

<u>Définition</u> : Un repère est la donnée d'un point O qui servira d'origine, et de trois directions fixes, définies par la donnée d'un trièdre non coplanaire de vecteurs unitaires$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, fixes du point de vue de l'observateur considéré.

- La position d'un point M est alors définie dans ce repère par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
- En général, on choisit le triède $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orthonormé et direct.

b. <u>Horloge.</u>

<u>Définition</u> : L'horloge désigne la référence de temps utilisée par l'observateur pour décrire le mouvement. Elle est décrite entièrement par la donnée d'un instant de référence, l'origine des temps, et par la durée observée entre cet instant de référence et l'instant ou l'observateur voit un évènement survenir.

c. <u>Référentiel.</u>

<u>Définition</u> : Un référentiel permet de définir le point de vue adopté par un observateur pour décrire un mouvement. Il est constitué d'un repère spatial et d'une horloge.

Dans l'exemple introductif, le référentiel pour l'observateur du train est le suivant :

- Un repère spatial ayant pour origine son siège et les trois directions fixes suivantes : une le long du train, une verticale et pour finir une horizontale perpendiculaire à la première.
- Sa montre avec laquelle il mesure par exemple la durée du voyage en repérant les instants de départ et d'arrivée.

Dans l'exemple introductif, le référentiel pour l'observateur dans le champ est le référentiel terrestre :

- Un repère spatial ayant pour origine sa position et les trois directions fixes suivantes : une le long des rails, une verticale et pour finir une horizontale perpendiculaire à la première.
- Sa montre avec laquelle il mesure par exemple les instants de passage de la tête du train et de la queue du train en face de sa position.

1.3. Postulat de la mécanique classique.

<u>Enoncé</u> : Les horloges de deux référentiels différents mesurent des durées égales.

Ce principe de la mécanique classique est né de l'observation de mouvements qui étaient accessibles à l'époque où il a été formulé :

- Par exemple, pour notre train, la durée du voyage sera la même pour un observateur dans le train et un observateur dans le référentiel terrestre.

En 1905, Albert Einstein a exposé dans un article la théorie de la mécanique relativiste. Son objectif était de définir une nouvelle théorie de la mécanique qui soit compatible avec la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.

Dans cette théorie, les durées mesurées entre deux évènements dépendent de l'observateur considéré :

- Du point de vue d'un observateur fixe dans le référentiel d'étude, on mesure une durée T pour le temps de parcours d'une longueur L par une particule se déplaçant en ligne droite à une vitesse v par rapport au référentiel d'étude.
- Du point de vue de la particule, on mesure une durée T'.

La relation liant T et T' est alors la suivante : $T=T'\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, on constate donc que T>T'. On appelle ce phénomène « dilatation du temps ».

<u>Par exemple</u> : On considère un proton participant au rayonnement cosmique. Il entre en collision avec un atome des couches hautes de l'atmosphère terrestre, ce qui génère un muon à une altitude de l'ordre de 30km.

Ce muon est une particule élémentaire présentant une vitesse proche de la lumière, elle met donc, dans le référentiel terrestre une durée de 10^{-4}s pour atteindre la surface de la planète.

Le muon est une particule qui présente une durée de ½ vie de 2.10^{-6}s, sur cette durée la moitié d'une population de muons générés à haute altitude se serait dissociée. Le rapport entre le temps de transit et la durée de vie entrainerait une population de muons à la surface terrestre qui serait divisé par 2^{50}, on en capterait très peu.

L'observation est tout autre, elle est beaucoup plus cohérente avec une population divisée par 2^8 ce qui suggère que le temps vu par la particule lors de ce trajet est de l'ordre de 3 fois la durée de vie. On peut en déduire que la vitesse du muon est de l'ordre de 99,8% de la vitesse de la lumière.

<u>Conclusion</u> : Le postulat d'invariance des horloges lors d'un changement de référentiel est une approximation qu'on jugera valide dans la plupart des études menées cette année. Cette approximation est plus généralement valable dès lors que les vitesses des objets étudiés respectent v<c/10.

2. Description du mouvement d'un point.

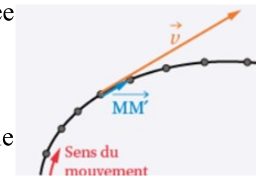
2.1. Éléments de description.

a. <u>Vecteur position.</u>

Définition : La description du mouvement d'un point M dans un référentiel passe par la donnée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de ce point à chaque instant t. On dit que l'on définit alors la trajectoire du mouvement.

b. <u>Vecteur vitesse.</u>

<u>Définition</u> : Le vecteur vitesse $\vec{v}_{M,R}$ d'un point dans un référentiel R est la dérivée temporelle du vecteur position dans ce référentiel : $\vec{v}_{M,R}=\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R$



<u>Propriété</u> : Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point M et est dirigé dans le sens du mouvement.

c. <u>Vecteur accélération.</u>

<u>Définition</u> : Le vecteur accélération $\vec{a}_{M,R}$ d'un point dans un référentiel R est la dérivée temporelle du vecteur vitesse dans ce référentiel : $\vec{a}_{M,R}=\left(\frac{d\vec{v}_{M,R}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$

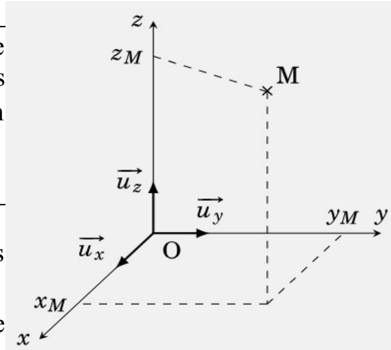
Si on exprime la vitesse sous la forme suivante $\vec{v}_{M,R}=\left\|\vec{v}_{M,R}\right\|\vec{u}_{M,R}$

Alors l'accélération s'écrit sous la forme : $\vec{a}_{M,R}=\left(\frac{d\left\|\vec{v}_{M,R}\right\|}{dt}\right)_{R.}\vec{u}_{M,R}+\vec{v}_{M,R}\frac{d\vec{u}_{M,R}}{dt}$.

Elle est composée :

- d'une accélération tangentielle : $\vec{a}_{M,R,T}=\left(\frac{d\left\|\vec{v}_{M,R}\right\|}{dt}\right)_{R.}\vec{u}_{M,R}$ dont la norme est la dérivée par rapport au temps de la norme de la vitesse.
- d'une accélération normale : $\vec{a}_{M,R,N}=\vec{v}_{M,R}\frac{d\vec{u}_{M,R}}{dt}$ dont la norme est proportionnelle à la vitesse et à la dérivée par rapport au temps du vecteur unitaire donnant la direction et le sens de la vitesse.

2.2. La base de projection cartésienne.



Définition : La base cartésienne désigne un trièdre orthonormé direct de vecteurs généralement désignés par $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ désignant trois directions fixes dans le référentiel d'étude. Les coordonnées dans cette base de projection sont définies par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
avec $x = \vec{e}_x.\overrightarrow{OM}$; $y = \vec{e}_y.\overrightarrow{OM}$; $z = \vec{e}_z.\overrightarrow{OM}$

Expression du vecteur déplacement élémentaire.
Le petit vecteur déplacement s'exprime directement à partir des petites variations des trois coordonnées : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z}$

Vecteur vitesse : on dérive le vecteur position exprimé dans la base cartésienne par rapport au temps :

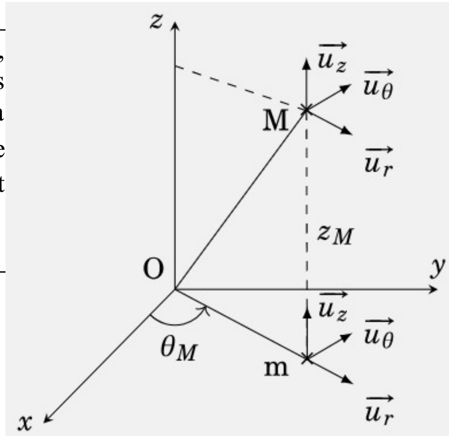
$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z = \dot{x}.\vec{e}_x + \dot{y}.\vec{e}_y + \dot{z}.\vec{e}_z}$$

Vecteur accélération : on dérive le vecteur vitesse exprimé dans la base cartésienne par rapport au temps :

$$\boxed{\left(\frac{d.\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z = \ddot{x}.\vec{e}_x + \ddot{y}.\vec{e}_y + \ddot{z}.\vec{e}_z}$$

Surfaces élémentaires et volume élémentaire :
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_x$ s'exprime $d\vec{S}_x = dydz\,\vec{e}_x$
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_y$ s'exprime $d\vec{S}_y = dxdz\,\vec{e}_y$
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_z$ s'exprime $d\vec{S}_z = dxdy\,\vec{e}_z$
Le volume élémentaire en coordonnées carrtésienne s'exprime $dV = dxdydz$

2.3. La base de projection cylindro-polaire.



Définition : La base cylindrique, encore appelée cylindro-polaire, désigne un trièdre orthonormé direct de vecteurs généralement désignés par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ dépendant du paramètre angulaire θ décrivant la position du point étudié et $\vec{e}_z$désignant une direction fixe dans le référentiel d'étude. Les coordonnées dans cette base de projection sont (r, θ, z).
Le vecteur position s'exprime alors:$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$.

Expression du vecteur déplacement élémentaire.
Si on considère un déplacement élémentaire$d\overrightarrow{OM}$ au départ du point : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$
On peut l'exprimer : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z}$

Propriété : Les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ dépendent du point M considéré plus particulièrement de l'angle θ, on peut exprimer les variations de ces vecteurs de la base lorsque le point M change par : $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$.

Vecteur vitesse.
On dérive le vecteur position exprimé dans la base cylindro-polaire par rapport au temps :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{dr\,\vec{e}_r}{dt}\right)_R + \left(\frac{dz\,\vec{e}_z}{dt}\right)_R = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R + \dot{z}\,\vec{e}_z = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

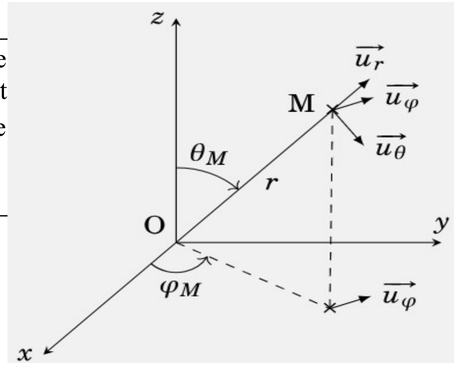
Vecteur accélération.
On dérive le vecteur vitesse exprimé dans la base cylindropolaire par rapport au temps :

$$\left(\frac{d\vec{v}_{M,R}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\dot{r}\,\vec{e}_r}{dt}\right)_R + \left(\frac{dr\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\dot{z}\,\vec{e}_z}{dt}\right)_R = (\ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r) + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

Finalement : $\left(\frac{d\vec{v}_{M,R}}{dt}\right)_R = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$

Surfaces élémentaires et volume élémentaire :
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_r$ s'exprime $d\vec{S}_r = (r\ d\theta)dz\,\vec{e}_r$
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_\theta$ s'exprime $d\vec{S}_\theta = drdz\,\vec{e}_\theta$
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_z$ s'exprime $d\vec{S}_z = dr(r\ d\theta)\vec{e}_z$
Le volume élémentaire en coordonnées carrtésiennes s'exprime $dV = dr(r\ d\theta)dz$

2.4. Coordonnées sphériques.



Définition : La base sphérique désigne un trièdre orthonormé direct de vecteurs généralement désignés par $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Les trois vecteurs sont dépendants du point considéré. Les coordonnées dans cette base de projection sont (r, θ, φ).
Le vecteur position s'exprime sous la forme : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

Expression du vecteur déplacement élémentaire.
Si on considère un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ au départ du point : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$
On peut l'exprimer : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + r d\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi}$

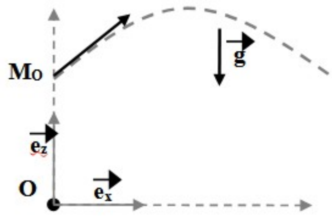
Vecteur vitesse.
Il est difficile d'exprimer les dérivées des vecteurs unitaires dans cette base. On peut cependant trouver le vecteur vitesse assez simplement à partir de l'expression du petit vecteur déplacement.
On obtient : $\boxed{\vec{v}_{M/R} = \dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta.\vec{e}_\varphi}$

Vecteur accélération.
On donne juste ici son expression, elle n'est pas à retenir !!!!
$$\boxed{\vec{a}_{M/R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + (r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta).\vec{e}_\varphi}$$

Surfaces élémentaires et volume élémentaire :
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_r$ s'exprime $d\vec{S}_r = (r\ d\theta)(r\ \sin\theta\, d\varphi)\vec{e}_r$
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_\theta$ s'exprime $d\vec{S}_\theta = dr(r\ \sin\theta\, d\varphi)\vec{e}_\theta$
La surface élémentaire de vecteur unitaire normal $\vec{e}_\varphi$ s'exprime $d\vec{S}_\varphi = dr(r\ d\theta)\vec{e}_\varphi$
Le volume élémentaire en coordonnées carrtésienne s'exprime $dV = dr(r\ d\theta)(r\ \sin\theta\, d\varphi)$

3. Choix d'une base adaptée pour l'étude d'un mouvement.

3.1. Mouvement à accélération constante.



L'étude du mouvement d'une balle dans le référentiel terrestre fourni un bon exemple de mouvement à accélération constante, puisque dans un modèle simple, ce système évolue dans le champ de pesanteur terrestre qui impose une accélération $\vec{a}_{M/R} = \vec{g}$ où $\vec{g}$ est le vecteur accélération de la pesanteur à la surface de la planète.
on suppose qu'à l'instant initial : $\vec{v}_{M/R}(t=0) = v_{Ox}\vec{e}_x + v_{Oz}\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OM}(t=0) = h\vec{e}_z$
L'étude théorique de tout mouvement commence par les choix suivants :

- Le référentiel dans lequel on effectue la description du mouvement. On choisit ici de manière évidente le référentiel du laboratoire (ou le référentiel terrestre local).
- La base de projection la plus adaptée à l'étude du mouvement considéré. Ici, on a deux éléments qui guident notre choix :
  - Le vecteur accélération constant qui introduit une direction verticale privilégiée
  - Le vecteur vitesse initiale qui présente une composante horizontale et une composante verticale.

On a deux directions fixes qui se dégagent de la description du système, on s'oriente vers une base de projection cartésienne s'appuyant sur ces deux directions.

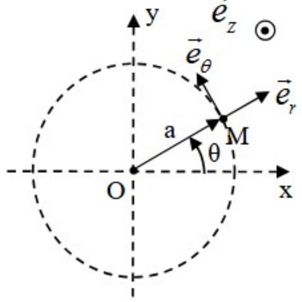
Le vecteur accélération dans la base choisie s'écrit alors $\vec{a}_{M/R} = -g\,\vec{e}_z$.
Par projection dans la base cartésienne, on obtient : $a_x = 0$ et $a_z = -g$
Les composantes de la vitesse vérifient alors $\frac{dv_x}{dt} = a_x = 0$ et $\frac{dv_z}{dt} = a_z = -g$
On intègre en tenant compte des conditions initiales : $v_x(t) = v_{Ox}$ et $v_z(t) = v_{Oz} - g\,t$
Les composantes du vecteur position vérifient alors $\frac{dx}{dt} = v_{Ox}$ et $\frac{dz}{dt} = v_{Oz} - g\,t$
On intègre en tenant compte des conditions initiales : $x(t) = v_{Ox}t$ et $v_z(t) = h + v_{Oz}t - \frac{g}{2}t^2$
On peut déterminer la trajectoire du point étudié dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ en déterminant z(x) :
Ici on peut simplement exprimer le temps en fonction de x ce qui donne. $t = \frac{x}{v_{Ox}}$
Puis en réintroduisant dans l'expression de la cote $z(x) = h + \frac{v_{Oz}}{v_{Ox}}x - \frac{g}{2v_{Oz}^2}x^2$ qui est l'équation d'une parabole.

3.2. Etude du mouvement circulaire.

a. Etude du mouvement circulaire à vitesse constante.

On considère une barre tournant autour d'un axe fixe et par rapport à laquelle elle est équilibrée. On doit effectuer un choix adapté de la base de projection pour mener l'étude de ce mouvement.

On identifie ici une trajectoire circulaire de centre O le centre de la barre qui est fixe dans le référentiel d'étude. La base de projection polaire$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ dans le plan du mouvement, complétée éventuellement en base de projection cylindrique avec un vecteur « axial » en$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$.



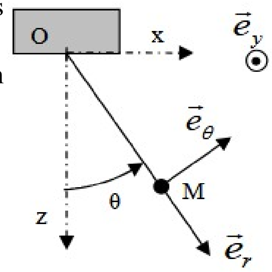
Dans cette base de projection, le vecteur position est $\overrightarrow{OM}=a\vec{e}_r$

La vitesse de rotation est constante, on la note souvent $\dot{\theta}=\omega$.Le vecteur vitesse s'exprime alors :$\vec{v}_{M/R}=\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R=a\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R=a\omega\vec{e}_\theta=v_O\vec{e}_\theta$

Où v_O la vitesse du point matériel sur le cercle est donc proportionnelle au rayon et à la vitesse de rotation ω. Il reste à déterminer le vecteur accélération : $\vec{a}_{M/R}=\left(\frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt}\right)_R=a\omega\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_R=-a\omega^2\vec{e}_r=\frac{v_O^2}{a}\vec{e}_r$.

L'accélération est centripète (dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire) et elle varie en fonction du carré de la vitesse et en inverse du rayon.
Ces caractéristiques sont assez intuitives pour tout conducteur ou passager d'une voiture.

b. Etude du mouvement circulaire à vitesse variable.



Pour illustrer ce type de système, on va étudier le mouvement d'un pendule simple dans le plan vertical $(O,\vec{e}_z,\vec{e}_x)$

La trajectoire est circulaire de centre O fixe dans le référentiel, on utilise toujours un base (cylindro-)polaire $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_y)$:

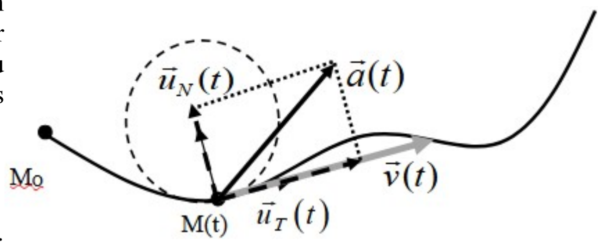
Vecteur position $\overrightarrow{OM}=l\vec{e}_r$ Vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}=l\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R=l\dot{\theta}\vec{e}_\theta=v\vec{e}_\theta$.

Vecteur accélération $\vec{a}_{M/R}=l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta+l\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_R=l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta-l\dot{\theta}^2\vec{e}_r=\dot{v}\vec{e}_\theta-\frac{v^2}{l}\vec{e}_\theta$

On retrouve la même composante centripète de l'accélération dirigée vers le centre du mouvement circulaire, on voit apparaître une nouvelle composante ortho radiale liée aux variations de la vitesse angulaire du mouvement circulaire.

3.3. Repère de Frenet pour une trajectoire plane connue.

Le repère de Frenet permet d'effectuer une généralisation à toutes les trajectoires planes des observations faites sur la trajectoire circulaire lorsqu'on introduit la vitesse du point le long de la trajectoire circulaire dans les expressions des éléments de cinématique.



On considère une trajectoire plane quelconque qu'on désignera par la suite par Γ.

- Le premier élément introduit est l'élément qui repère la position du point M le long de la trajectoire. Puisque la trajectoire est imposée, il suffit de donner la distance parcourue par ce point depuis un point de référence noté ici M_O. On nomme ce paramètre abscisse curviligne et on le note généralement s(t). Son expression mathématique est alors $s(t)=\int_{M_O \xrightarrow{\Gamma} M(t)} ds$ où ds désigne la distance élémentaire parcourue le long de Γ par le point M.
- En un point M(t) de la trajectoire, on peut alors introduire $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté dans le sens de parcours de la trajectoire. Le vecteur déplacement élémentaire du point M est alors exprimé facilement par $d\overrightarrow{M_OM}(t)=ds\vec{u}_T$

La vitesse du point M le long de la trajectoire est alors$\vec{v}_{M/R}=\frac{d\overrightarrow{M_OM}}{dt}=\dot{s}\vec{u}_T=v\vec{u}_T$

Ce qui rappelle la forme $\vec{v}_{M/R}=v\vec{e}_\theta$ de la trajectoire circulaire

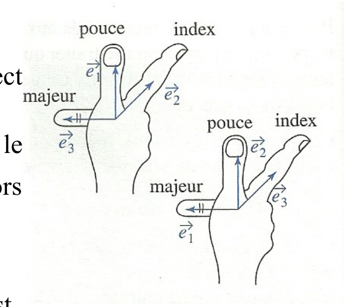
On peut exprimer l'accélération au point M sous la forme $\vec{a}_{M/R}=\ddot{s}\vec{u}_T+\dot{s}\frac{d\vec{u}_T}{dt}=\dot{v}\vec{u}_T+v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$

Ce qui rappelle la forme $\vec{a}_{M/R}=\dot{v}\vec{e}_\theta-\frac{v^2}{l}\vec{e}_\theta$

- On introduit le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ et le rayon de courbure ρ(M) de la trajectoire en M(t) tels que la trajectoire s'approxime par le cercle tangent de rayon ρ(M) et dont le centre est pointé par $\vec{u}_N$

L'accélération dans le repère de Frenet s'exprime : $\vec{a}_{M/R}=\dot{v}\,\vec{u}_T+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$

A propos des bases orthonormées directes.



Règles pour construire un trièdre direct de vecteurs (ou pour vérifier le sens direct d'un trièdre).

- <u>*Les trois doigts de la main droite*</u> *:* $\vec{e}_1$ aligné sur le pouce tendu dans le plan de la paume, $\vec{e}_2$ aligné sur l'index dans le plan de la paume, alors $\vec{e}_3$ aligné sur le majeur dressé perpendiculairement à la paume.

<u>Base orthonormée directe :</u>
Une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est un trièdre dont chaque vecteur est de norme unitaire, chaque couple de vecteur est de produit scalaire nul (on dit encore qu'ils sont orthogonaux deux à deux), et de sens direct.

<u>Capacités exigibles</u>

- Savoir que le mouvement est relatif à un référentiel.
- Citer une situation ou la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point
- Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Etablir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté à la situation étudiée.
- Dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, exprimer les vecteurs vitesse et position en fonction du temps. Etablir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme : Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- Repérage d'un point dont la trajectoire est connue, repère de Frenet : Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.

Lois de Newton.

Introduction.

On a vu dans le chapitre précédent les outils permettant de décrire le mouvement d'un point ou d'un solide. On va maintenant s'attacher à l'étude des causes du mouvement et des principes posés et exploités en dynamique pour en déduire le mouvement d'un système.

1. Éléments d'inertie d'un système mécanique.

1.1. Masse inertielle et quantité de mouvement d'un point.

a. Masse inertielle.

Dans le chapitre précédent, on a introduit les éléments nécessaires à la description du mouvement d'un point ou d'un solide (dans quelques cas simples), mais il ne suffit pas de connaître le mouvement du système étudié pour faire le lien avec les causes de ce mouvement :

- Pour attraper une balle de tennis lancé à une vitesse v, il suffit en général d'être relativement habile (et que le lanceur le soit aussi).
- Si on remplace la balle de tennis par une boule de pétanque, il est en général conseillé d'être également relativement costaux.

Définition : L'inertie d'un système mécanique mesure la capacité de ce dernier à s'opposer à la modification de son mouvement.

b. Modèle du point matériel.

Définition : La masse (inertielle) d'un système mécanique Σ, souvent notée m_Σ, est une grandeur scalaire mesurant l'inertie d'un système relativement à son mouvement global de translation. Elle s'exprime en kg.

Modèle du point matériel : Le modèle du point matériel revient à réduire la description d'un système à un point auquel on attribue la masse totale du système.
Définition : Pour un point matériel M de masse m et de vitesse dans le référentiel R $\vec{v}_{M/R}$, on définit la quantité de mouvement $\vec{p}_{M/R}$ comme le produit de la masse par le vecteur vitesse : $\vec{p}_{M/R}=m\vec{v}_{M/R}$

1.2. Centre d'inertie et quantité de mouvement d'un système.

a. Quantité de mouvement.

Définition : Pour un système étendu, la masse et la quantité de mouvement totale du système sont la somme des masses et des quantités de mouvement de l'ensemble des parties du système.
Pour une répartition de points matériels donnée par : $\{M_i, m_i\} \quad i\in[1,N]$,
La masse totale est $m_\Sigma=\sum_{i=1}^{N} m_i$; la quantité de mouvement totale est exprimée par : $\vec{p}_{\Sigma,R}=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_{i,R}$

b. Centre d'inertie.

Définition : Pour un système matériel Σ étendu, on définit le centre d'inertie G du système comme le barycentre de la répartition de masse du système. Pour une répartition de points matériels donnée par : $\{M_i, m_i\} \quad i\in[1,N]$, le vecteur position du centre d'inertie G est donnée par : $m_\Sigma\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i$
Propriété : Pour un système étendu de masse totale m_Σ et de centre d'inertie G, la quantité de mouvement totale du système dans le référentiel R peut s'écrire sous la forme : $\vec{p}_{\Sigma,R}=m_\Sigma\vec{v}_{G/R}$

Démonstration : On peut partir de la définition du centre d'inertie G : $m_\Sigma\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i$
On dérive alors cette relation par rapport au temps dans le référentiel d'étude R :
$\frac{d}{dt}\left(m_\Sigma\overrightarrow{OG}\right)=m_\Sigma\vec{v}_{G/R}$ et $\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i\right)_R=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_{i,R}=\vec{p}_{M/R}$, on obtient bien $\vec{p}_{\Sigma,R}=m_\Sigma\vec{v}_{G/R}$.

Propriété : En appliquant le modèle du point matériel à un objet étendu, on étudie en fait le mouvement de translation du centre d'inertie du système étudié.

2. Les lois de Newton, ou les principes de la mécanique newtonienne.

2.1. Première loi de Newton (ou principe d'inertie).

<u>Enoncé</u> : Il existe des référentiels, dits galiléens, pour lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est une translation rectiligne uniforme.

- Une translation rectiligne uniforme est un **<u>mouvement de vecteur vitesse constant</u>**.
- Un point matériel isolé n'est soumis à **<u>aucune action mécanique</u>**.
- La mécanique Newtonienne (ou classique) postule donc l'existence de référentiels galiléens.

Cette année, les référentiels d'études seront supposés galiléens. Par exemple le référentiel terrestre n'est pas parfaitement galiléen mais l'hypothèse reste raisonnable pour la plupart des systèmes étudiés.

- Mouvement relatifs de deux référentiels galiléens :

Si on suppose que deux référentiels R_1 et R_2 sont galiléens, les vecteurs vitesses $\vec{v}_{M/R_1}$ et $\vec{v}_{M/R_2}$ d'un point matériel isolé sont constants dans chacun des référentiels.
$\vec{v}_{M/R_1}$ est de direction fixe dans R_1. R_2 ne peut pas être en rotation par rapport à R_1 puisque dans ce cas la direction du vecteur vitesse du point M étudié serait variable dans R_2. Par conséquent, R_1 et R_2 sont en translation l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire qu'ils partagent le même système d'axe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Il reste à étudier le mouvement relatif de leurs origines.

En reprenant l'expression de la vitesse dans le référentiel R_1 : $\vec{v}_{M/R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1 O_2}}{dt}\right)_{R_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2 M}}{dt}\right)_{R_1}$

qu'on traduit $\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{O_2/R_1} + \vec{v}_{M/R_2}$ et on en conclut que $\vec{v}_{O_2}/R_1$ est constant.

<u>Conclusion</u> : Deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

2.2. Actions mécaniques. Troisième loi de Newton.

a. <u>Définitions.</u>

<u>Définition d'une action mécanique</u> : La notion d'action mécanique regroupe tous les phénomènes susceptibles de mettre en mouvement un objet (ou de le déformer si c'est possible).

<u>Actions mécaniques sur un point matériel :</u>

Lorsqu'on considère un point matériel M, l'action mécanique exercée par un système extérieur S sur le point M est décrite par un vecteur nommé vecteur force et généralement noté $\vec{F}_{S\to M}$. Sa norme s'exprime en Newton (N).

<u>Actions mécaniques sur un système matériel :</u>

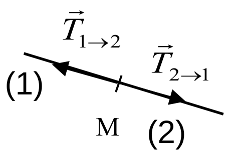
Lorsqu'on considère un système matériel Σ, on pourra définir une action mécanique en précisant le vecteur force qui lui est associé et sur quelle sous partie du système elle s'applique. On reviendra sur ce point quand on étudiera le mouvement d'un solide à la fin de cette séquence de mécanique.

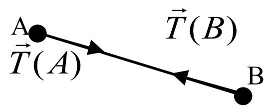
b. <u>Troisième loi de Newton, principe des actions réciproques.</u>

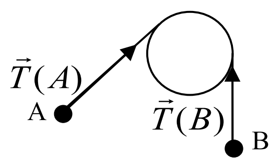
Soient deux points matériels M_1 et M_2. On note $\vec{F}_{1\to 2}$ la force exercée par M_1 sur M_2, et $\vec{F}_{2\to 1}$ la force exercée par M_2 sur M_1. Le principe des actions réciproques affirme que ces deux forces sont de même direction que l'axe (M_1M_2) , de même normes et de sens opposés. $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$; $\vec{F}_{1\to 2} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{0}$

<u>Exemple</u> : La force exercée par une personne sur la terre est de même intensité que celle exercée par la terre sur cette personne. Pour la personne, cette force est importante car sa masse est petite, pour la terre, elle est ridicule car sa masse est énorme.

c. <u>Application : tension d'un fil idéal.</u>







On considère un fil tendu entre deux points A et B, et M un point le long du fil.
La tension $\vec{T}_{1\to 2}$du fil est la force exercée par la partie du fil d'un coté de M (1) sur l'autre partie du fil (2). La tension $\vec{T}_{1\to 2}$est orientée de (2) vers (1).

- Le principe d'action réaction affirme que en un point M le long du fil : $\vec{T}_{2\to 1} = -\vec{T}_{1\to 2}$.
- Pour un fil idéal, c'est-à-dire de masse négligeable et inextensible, on montre que les tensions exercées par le fil sur les points A et B sont opposés.
- Pour un fil et une poulie idéale, poulie de masse négligeable et le fil ne glissant pas sur la poulie, on montre alors que les tensions exercées par le fil sur les points A et B sont de même norme.

2.3. Seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique ou loi de la quantité de mouvement).

<u>Enoncé</u> : Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement du point matériel M de masse m est reliée à l'ensemble des forces exercées sur ce point par l'équation : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}_{\to M}$

Pour un système mécanique plus complexe qu'un point matériel, le principe fondamental de la dynamique se traduit simplement par : $\left(\frac{d\vec{p}_{\Sigma/R}}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}_{\to \Sigma}$

Pour un système fermé de masse constante et de centre d'inertie G $\left(\frac{d\vec{p}_{\Sigma/R}}{dt}\right)_R = m_\Sigma \vec{a}_{G/R} = \sum \vec{F}_{\to \Sigma}$

3. Mouvement dans le champ de pesanteur terrestre uniforme.

On considère un projectile modélisé par un point matériel M de masse m dans le champ de pesanteur terrestre.
On se place dans le référentiel terrestre R supposé galiléen.

On utilise une base de projection cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $(\vec{e}_z)$ vertical vers le haut et le vecteur vitesse à l'instant initial$\vec{v}_O$ dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$.
Le bilan des actions mécaniques s'exerçant sur le projectile est :

- **L'action mécanique de la gravité terrestre s'exerce à distance** en tout point du solide et peut être modélisée comme une force de vecteur $\vec{P} = m\vec{g}$ qui s'applique au centre d'inertie du système, qu'on appelle souvent le « poids ».
- **L'action mécanique de l'air sur le solide est une action de contact**. Elle peut être modélisée par deux composantes :
  - ➢ La poussée d'Archimède qui résulte des forces de pression exercé par le fluide entourant le solide. Elle est modélisable par une force s'appliquant au centre de masse du solide et de vecteur $\vec{A} = -m_D\vec{g}$ où m_D est la masse de fluide déplacée par le solide.
  - ➢ Une trainée qui résulte des frottements engendrés par le mouvement du solide dans le fluide et qui s'oppose à ce mouvement. On la modélise par un vecteur force s'appliquant au centre d'inertie, de même direction mais de sens opposé au vecteur vitesse. L'expression de sa norme fait l'objet de plusieurs modélisations possibles.

3.1. Étude en négligeant les frottements.

a. <u>Bilan des forces.</u>

La liste des forces s'exerçant sur le projectile est :

- Le poids du projectile : $\vec{P} = m\vec{g}$
- On néglige toutes forces de frottement et on supposera que la poussée d'Archimède est négligeable.

b. <u>Application de la seconde loi de Newton.</u>

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la seconde loi de Newton s'énonce : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \vec{P}$

Ce qui amène à : $\vec{a}_{M/R} = \vec{g}$ On tombe sur le mouvement à accélération constante du cours de cinématique.

3.2. Étude en appliquant un modèle de frottement linéaire.

La force de frottement fluide linéaire est un bon modèle dans le cas où l'écoulement de l'air autour du projectile présente un caractère laminaire, ce qui est le cas pour de faibles vitesses du projectile par rapport au fluide.

a. <u>Bilan des forces.</u>

La liste des forces s'exerçant sur le projectile est :

- Le poids du projectile : $\vec{P} = m\vec{g}$
- La force de frottement linéaire exprimée par : $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}_{M/R}$.
- On néglige encore ici la poussée d'Archimède.

b. <u>Application de la loi de la quantité de mouvement.</u>

On applique la loi seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \vec{P} - \alpha\,\vec{v}_{M/R}$

On la projette sur les vecteurs de la base : $m.\ddot{x} = -\alpha\,\dot{x} \quad m.a_y = 0 \quad m\ddot{z} = -mg - \alpha\,\dot{z}$

On obtient ici les équations du mouvement pour le projectile.

c. <u>Résolution des lois du mouvement obtenues.</u> (A faire en direct)

3.3. Etude en appliquant un modèle de frottement quadratique.

La force de frottement fluide quadratique est un bon modèle dans le cas où l'écoulement de l'air autour du projectile présente un caractère turbulent, ce qui est le cas pour de grandes vitesses du projectile par rapport au fluide dans lequel il évolue.

a. <u>Bilan des forces.</u>

La liste des forces s'exerçant sur le projectile est :

- Le poids du projectile : $\vec{P}=m\vec{g}$
- La force de frottement linéaire exprimée par : $\vec{f}=-\beta\|\vec{v}_{M/R}\|\vec{v}_{M/R}$.

b. <u>Application de la loi de la quantité de mouvement.</u>

Loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R=\vec{P}-\beta\|\vec{v}_{M/R}\|\vec{v}_{M/R}$

On la projette sur les vecteurs de la base pour obtenir les équations du mouvement :

$$\boxed{m\ddot{x}=-\beta\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}\,\dot{x}\quad m.a_y=0\quad m\ddot{z}=-mg-\beta\sqrt{\dot{x}^2+\dot{z}^2}\,\dot{z}}$$

On obtient un système d'équations couplées et non linéaires. Il est impossible d'en extraire des solutions analytiques dans le cas général.

c. <u>Cas particulier de la chute libre sans vitesse initiale.</u>

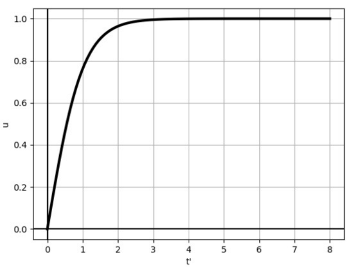
On s'intéresse maintenant à un sous cas de l'étude précédente où le système est lâché sans vitesse initiale. On se ramène alors à une étude à une dimension où la cote z vérifie l'équation : $m\ddot{z}=-mg+\beta\dot{z}^2$

On introduit la norme de la vitesse du projectile en posant $\dot{z}=-v$. Elle vérifie alors l'équation : $\boxed{\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{\beta}{m}v^2=g}$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 mais elle est non linéaire.

<u>On va d'abord montrer comment on peut extraire des renseignements de l'équation différentielle sans chercher à la résoudre.</u>

- On peut déterminer une solution particulière de l'équation qui correspond au régime stationnaire, déterminant la vitesse limite atteinte par le projectile. Dans ce cas $\boxed{\dfrac{dv_l}{dt}=0}$ puisqu'on cherche une solution particulière constante et on obtient $\boxed{v_l=\sqrt{\dfrac{mg}{\beta}}}$
- On peut alors exprimer le temps caractéristique du régime transitoire amenant le point matériel de la vitesse nulle à la vitesse limite. Pour cela, on introduit les variables adimensionnées suivantes :



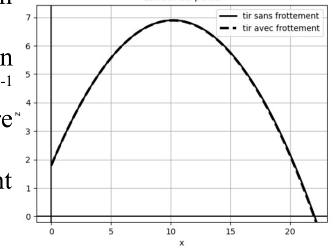
✓ La vitesse réduite est définie par $u=\dfrac{v}{v_l}$. Elle vérifie $\dfrac{du}{dt}+\sqrt{\dfrac{\beta g}{m}}u^2=\sqrt{\dfrac{\beta g}{m}}$

✓ Le temps réduit défini par : $t'=\dfrac{t}{\tau}\quad avec\quad \tau=\sqrt{\dfrac{m}{\beta g}}$

l'équation du mouvement devient : $\dfrac{du}{dt'}+u^2=1$ On peut conclure sans résolution formelle de l'équation que la particule atteindra une vitesse de chute constante v_l au bout d'un temps de l'ordre du temps caractéristique τ.

d. <u>Résolution numérique des équations du mouvement dans le cas général.</u>

Un programme python à disposition sur cahier de prépa permet une résolution numérique des équations du mouvement avec vitesse initiale non nulle :



✓ On considère le lancer d'un poids de 7kg par un « beau bébé » en supposant qu'il le lance avec un angle initial de 45°, une vitesse initiale de $14 m.s^{-1}$ et on prend un coefficient β de l'ordre de $10^{-3} kg.m^{-1}$ (estimation pour une sphère de rayon 10cm dans l'air).

On observe dans ce cas que les trajectoires avec et sans frottement sont quasiment identiques, les frottements sont donc négligeables pour ce type d'étude.

✓ On considère le tir d'un volant de badminton de masse 5.10^{-3}kg par un joueur au fond du terrain avec un angle initial de 30°, une vitesse initiale de $100 m.s^{-1}$ depuis une hauteur de 2,5m. On prend un coefficient β de l'ordre de $10^{-3} kg.m^{-1}$.

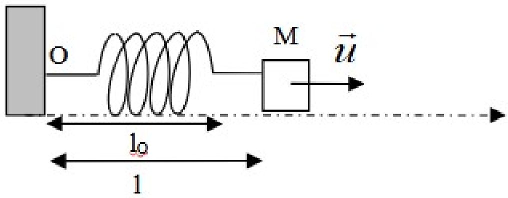
On observe dans ce cas que les trajectoires avec et sans frottement sont très différentes. Celle avec frottement finit en fond de terrain en face alors que celle sans frottement finit à plus de 200m.

4. Oscillations autour d'un point d'équilibre.

4.1. Masse accrochée à un ressort.

a. Ressort orienté horizontalement.

On considère un objet modélisé par un point matériel M de masse m relié à un point O sur le même axe horizontal que M par un ressort de longueur à vide l_O et de raideur k. La masse est astreinte à se déplacer sur un axe horizontal (par exemple, à l'aide d'une liaison glissière).



Bilan des forces s'appliquant sur la masse :
La force de rappel élastique : $\vec{F}_{el}=-k(l-l_O)\vec{u}$
La force de gravité : $\vec{P}=m\vec{g}$
La réaction du support supposé sans frottement : $\vec{R}$

On choisit une base de projection cartésienne$(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ avec $\vec{u}=\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$vertical vers le haut. On choisit pour origine spatiale le point M_O position de M lorsque le ressort n'est pas étendu. La coordonnée x s'exprime alors : $x=(l-l_O)$

On applique la 2LN à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen. $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R=\vec{P}+\vec{F}_{el}+\vec{R}$

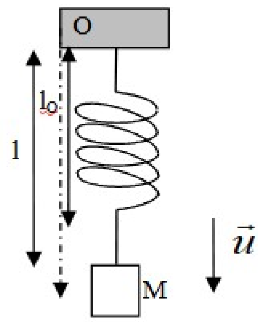
<u>On projette selon la direction</u> $\vec{e}_z$ $0=-mg+R_Z$.
<u>On projette selon la direction</u> $\vec{e}_x$ $m\ddot{l}=-k(l-l_O)$ en fonction de la variable l ; $m\ddot{x}=-kx$ en fonction de x.

$\boxed{\ddot{x}+\omega_O^2x=0}$ avec la pulsation propre $\omega_O=\sqrt{\frac{k}{m}}$

On obtient l'équation de l'oscillateur harmonique comme équation du mouvement.

b. Ressort orienté verticalement et masse soumise à des frottements linéaires.

On considère un objet modélisé par un point matériel M de masse m relié à un point O sur le même axe vertical et au dessus de M par un ressort de longueur à vide l_O et de raideur k. On considère que la masse se déplace uniquement selon la direction verticale et qu'elle est soumise à une force de frottement linéaire.



Liste des forces s'appliquant sur la masse :
La force de rappel élastique : $\vec{F}_{el}=-k(l-l_O)\vec{u}$
La force de gravité : $\vec{P}=m\vec{g}$
La force de frottement linéaire : $\vec{F}_f=-\lambda\vec{v}_{M/R}$
On choisit une base de projection cartésienne telle que $\vec{e}_z$ soit vertical vers le bas et pour origine spatiale le point O.

La 2LN dans le ref terrestre galiléen donne : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R=\vec{P}+\vec{F}_{el}+\vec{F}_f$

On projette alors sur la direction verticale : $m\ddot{l}=-mg-k(l-l_O)-\lambda\dot{l}$

On ramène l'étude au mouvement autour de la position d'équilibre qui est déterminée par écriture de la condition d'équilibre $\vec{P}+\vec{F}_{el}+\vec{F}_f=\vec{0}$ ce qui amène$l_{eq}=l_O-\frac{mg}{k}$.

On introduit alors la nouvelle variable Z=l-l_{eq}. Alors Z(t) vérifie : $m\ddot{Z}+\lambda\dot{Z}+kZ=0$

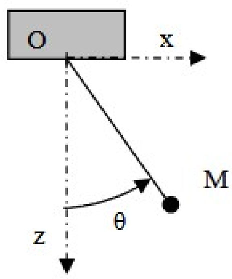
On peut mettre l'équation du mouvement autour de la position d'équilibre sous la forme canonique de l'oscillateur harmonique amorti sans second membre : $\ddot{Z}+\frac{\omega_O}{Q}\dot{Z}+\omega_O^2Z=0$

Avec la pulsation propre : $\omega_O=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et le facteur de qualité : $Q=\frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$

4.2. Pendule simple

a. Système étudié.

On considère un pendule constitué d'un point matériel M de masse m relié à un point O fixe par un fil de masse négligeable et inextensible de longueur l.



Les forces qui s'exercent sur le point matériel sont :
Le poids $\vec{P}=m\vec{g}$ La tension du fil : $\vec{T}$
On choisit une base de projection polaire $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_y)$, θ est l'angle entre la verticale vers le bas et la direction de $\overrightarrow{OM}$

b. Etablissement de l'équation du mouvement.

On écrit la 2LN dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R=\vec{P}+\vec{T}$

On projette selon $\vec{e}_r$: $ml\dot{\theta}^2 = T$ On projette selon $\vec{e}_\theta$: $m.l\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

On obtient l'équation du mouvement du pendule : $\ddot{\theta} + \omega_O^2 \sin\theta = 0$ Avec la pulsation propre $\omega_O = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Cette équation différentielle n'est pas linéaire, il n'y a donc pas de résolution analytique possible.

c. <u>Equation du mouvement aux petits angles.</u>

On se ramène souvent à l'étude des solutions pour des petits angles. On pose alors $\theta = 0 + \delta\theta$
On traduit alors les termes de l'équation du mouvement $\ddot{\theta} = \delta\ddot{\theta}$ et $\sin\theta \approx \delta\theta$
On obtient alors l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique $\delta\ddot{\theta} + \omega_O^2 \delta\theta = 0$

5. Solide en glissement sur un plan incliné.

5.1. Système étudié.

On considère un skieur situé sur une piste inclinée d'un angle α. On le modélise par un solide de centre d'inertie G qu'on suppose resté en translation le long de la pente.
Le bilan des forces s'exerçant sur le solide est :

- L'action à distance de la gravité terrestre.
- L'action de contact du plan sur le solide. Elle se décompose en deux composantes :
  - Une composante normale perpendiculaire au plan de vecteur force $\vec{N}$. La norme et le point d'application de cette composante sont à déterminer en fonction du système.
  - Une composante tangentielle, résultant des frottements entre les deux systèmes, qui s'oppose au mouvement du solide (quand il y en a un) de vecteur force $\vec{T}$.

5.2. Situation d'équilibre ou mise en mouvement ?

On étudie une première situation pour laquelle on suppose que le skieur est initialement immobile sur la piste. Dans ce cas, **<u>les lois de la statique de Coulomb s'expriment</u>** de la manière suivante :

- Dans la situation de non glissement du solide définie par une vitesse de glissement $\vec{v}_g = \vec{0}$
- La composante tangentielle de l'action de contact solide vérifie la relation $\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$ où le paramètre f_s est le coefficient de frottement statique.

Si cette relation n'est plus vérifiée, le solide se met en mouvement et on observe le début du glissement.

5.3. Etude du mouvement de glissement.

On étudie maintenant la situation pour laquelle on suppose que le skieur est initialement immobile sur la piste mais on sait que la condition de non glissement n'est pas respectée, il se met donc en mouvement.
Dans ce cas, **<u>les lois de la dynamique de Coulomb s'expriment</u>** de la manière suivante :

- Dans la situation de glissement du solide pour laquelle $\vec{v}_g \neq \vec{0}$;
- La composante tangentielle de l'action de contact vérifie $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$ où le paramètre f_d est le coefficient de frottement dynamique.

<u>Capacités exigibles</u>

- Masse d'un système, conservation de la masse d'un système fermé.
- Quantité de mouvement d'un point d'un système de points. Lien avec le vitesse du centre d'inertie.
- Énoncer la première loi de Newton (ou principe d'inertie) comme condition d'existence de référentiels galiléens
- Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- Etablir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
- Exploiter la seconde loi de Newton pour déterminer les équations du mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen.
- Mener l'étude d'un solide dans le champ de pesanteur avec ou sans frottement.
- Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire.
- Établir l'équation du mouvement du pendule simple
- Frottements solide/solide : les lois de Coulomb ne sont pas à connaître mais l'étudiant doit savoir les exploiter pour résoudre un exercice