Description et paramétrage du mouvement d'un point.

1. Description du point de vue d'un observateur.

1.1. Relativité du mouvement.

Prenons le cas d'un passager assis dans un train lancé sur les rails à pleine vitesse entre Paris et Marseille.

- Selon le point de vue de ce passager, il est immobile par rapport au train, sa position est fixe dans le temps, son vecteur vitesse et son vecteur accélération sont nuls.
- Selon le point de vue d'un ruminant situé dans un champ le long de la voie ferrée, le train et, par conséquent, le passager sont en mouvement, le vecteur position du passager évolue au cours du temps, son vecteur vitesse est non nul et son vecteur accélération peut ne pas être nul.
- Le passager et le ruminant sont deux observateurs qui décrieront le mouvement d'un même objet d'étude de manière différente car leurs points de vue sont différents.

Conclusion : Le **mouvement** d'un objet est une **notion relative** au point de vue adopté, la première précaution à prendre dans une étude cinématique est de préciser le **point de vue adopté** en spécifiant le **référentiel** dans lequel on réalise cette description.

1.2. Définition d'un référentiel.

a. Repère.

Définition : Un repère est la donnée d'un point O qui servira d'origine, et de trois directions fixes, définies par la donnée d'un trièdre non coplanaire de vecteurs unitaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, fixes du point de vue de l'observateur considéré.

- ➢ La position d'un point M est alors définie dans ce repère par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
- ➢ En général, on choisit le triède $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ orthonormé et direct.

b. Horloge.

Définition : L'horloge désigne la référence de temps utilisée par l'observateur pour décrire le mouvement. Elle est décrite entièrement par la donnée d'un instant de référence, l'origine des temps, et par la durée observée entre cet instant de référence et l'instant ou l'observateur voit un évènement survenir.

c. Référentiel.

Définition : Un référentiel permet de définir le point de vue adopté par un observateur pour décrire un mouvement. Il est constitué d'un repère spatial et d'une horloge.

Dans l'exemple introductif, le référentiel pour l'observateur du train est le suivant :

- ➢ Un repère spatial ayant pour origine son siège et les trois directions fixes suivantes : une le long du train, une verticale et pour finir une horizontale perpendiculaire à la première.
- ➢ Sa montre avec laquelle il mesure par exemple la durée du voyage en repérant les instants de départ et d'arrivée.

Dans l'exemple introductif, le référentiel pour l'observateur dans le champ est le référentiel terrestre :

- ➢ Un repère spatial ayant pour origine sa position et les trois directions fixes suivantes : une le long des rails, une verticale et pour finir une horizontale perpendiculaire à la première.
- ➢ Sa montre avec laquelle il mesure par exemple les instants de passage de la tête du train et de la queue du train en face de sa position.

1.3. Postulat de la mécanique classique.

Enoncé : Les horloges de deux référentiels différents mesurent des durées égales.

Ce principe de la mécanique classique est né de l'observation de mouvements qui étaient accessibles à l'époque où il a été formulé :

- ➢ Par exemple, pour notre train, la durée du voyage sera la même pour un observateur dans le train et un observateur dans le référentiel terrestre.

En 1905, Albert Einstein a exposé dans un article la théorie de la mécanique relativiste. Son objectif était de définir une nouvelle théorie de la mécanique qui soit compatible avec la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.
Dans cette théorie, les durées mesurées entre deux évènements dépendent de l'observateur considéré :

- ➢ Du point de vue d'un observateur fixe dans le référentiel d'étude, on mesure une durée T pour le temps de parcours d'une longueur L par une particule se déplaçant en ligne droite à une vitesse v par rapport au référentiel d'étude.
- ➢ Du point de vue de la particule, on mesure une durée T'.

La relation liant T et T' est alors la suivante : $T=T'\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, on constate donc que T>T'. On appelle ce phénomène « dilatation du temps ».

<u>Par exemple</u> : On considère un proton participant au rayonnement cosmique. Il entre en collision avec un atome des couches hautes de l'atmosphère terrestre, ce qui génère un muon à une altitude de l'ordre de 30km.
Ce muon est une particule élémentaire présentant une vitesse proche de la lumière, elle met donc, dans le référentiel terrestre une durée de 10^{-4}s pour atteindre la surface de la planète.
Le muon est une particule qui présente une durée de ½ vie de 2.10^{-6}s, sur cette durée la moitié d'une population de muons générés à haute altitude se serait dissociée. Le rapport entre le temps de transit et la durée de vie entrainerait une population de muons à la surface terrestre qui serait divisé par 2^{50}, on en capterait très peu.
L'observation est tout autre, elle est beaucoup plus cohérente avec une population divisée par 2^8 ce qui suggère que le temps vu par la particule lors de ce trajet est de l'ordre de 3 fois la durée de vie. On peut en déduire que la vitesse du muon est de l'ordre de 99,8% de la vitesse de la lumière.

<u>Conclusion</u> : Le postulat d'invariance des horloges lors d'un changement de référentiel est une approximation qu'on jugera valide dans la plupart des études menées cette année. Cette approximation est plus généralement valable dès lors que les vitesses des objets étudiés respectent v<c/10.

2. Description du mouvement d'un point.

2.1. Éléments de description.

a. <u>Vecteur position.</u>

b. <u>Vecteur vitesse.</u>

c. <u>Vecteur accélération.</u>

2.2. La base de projection cartésienne.

2.3. La base de projection cylindro-polaire.

2.4. La base de projection sphériques.

3. Choix d'une base adaptée pour l'étude d'un mouvement.

3.1. Mouvement à accélération constante.

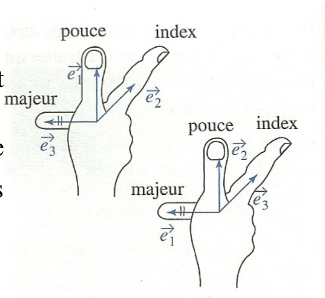
3.2. Etude du mouvement circulaire.

a. <u>Etude du mouvement circulaire à vitesse constante.</u>

b. <u>Etude du mouvement circulaire à vitesse variable.</u>

3.3. Repère de Frenet pour une trajectoire plane connue.

A propos des bases orthonormées directes.



Règles pour construire un trièdre direct de vecteurs (ou pour vérifier le sens direct d'un trièdre).

- *<u>Les trois doigts de la main droite</u> :* $\vec{e}_1$ aligné sur le pouce tendu dans le plan de la paume, $\vec{e}_2$ aligné sur l'index dans le plan de la paume, alors $\vec{e}_3$ aligné sur le majeur dressé perpendiculairement à la paume.

<u>Base orthonormée directe :</u>
Une base orthonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un trièdre dont chaque vecteur est de norme unitaire, chaque couple de vecteur est de produit scalaire nul (on dit encore qu'ils sont orthogonaux deux à deux), et de sens direct.

Capacités exigibles

- Savoir que le mouvement est relatif à un référentiel.
- Citer une situation ou la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point
- Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Etablir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté à la situation étudiée.
- Dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, exprimer les vecteurs vitesse et position en fonction du temps. Etablir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme : Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- Repérage d'un point dont la trajectoire est connue, repère de Frenet : Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.

Lois de Newton.

Introduction.

On a vu dans le chapitre précédent les outils permettant de décrire le mouvement d'un point ou d'un solide. On va maintenant s'attacher à l'étude des causes du mouvement et des principes posés et exploités en dynamique pour en déduire le mouvement d'un système.

1. Éléments d'inertie d'un système mécanique.

1.1. Masse inertielle et quantité de mouvement d'un point.

a. Masse inertielle.

Dans le chapitre précédent, on a introduit les éléments nécessaires à la description du mouvement d'un point ou d'un solide (dans quelques cas simples), mais il ne suffit pas de connaître le mouvement du système étudié pour faire le lien avec les causes de ce mouvement :

- Pour attraper une balle de tennis lancé à une vitesse v, il suffit en général d'être relativement habile (et que le lanceur le soit aussi).
- Si on remplace la balle de tennis par une boule de pétanque, il est en général conseillé d'être également relativement costaux.

Définition : L'inertie d'un système mécanique mesure la capacité de ce dernier à s'opposer à la modification de son mouvement.

b. Modèle du point matériel.

Définition : La masse (inertielle) d'un système mécanique Σ, souvent notée m_Σ, est une grandeur scalaire mesurant l'inertie d'un système relativement à son mouvement global de translation. Elle s'exprime en kg.

Modèle du point matériel : Le modèle du point matériel revient à réduire la description d'un système à un point auquel on attribue la masse totale du système.
Définition : Pour un point matériel M de masse m et de vitesse dans le référentiel R $\vec{v}_{M/R}$, on définit la quantité de mouvement $\vec{p}_{M/R}$ comme le produit de la masse par le vecteur vitesse : $\vec{p}_{M/R}=m\vec{v}_{M/R}$

1.2. Centre d'inertie et quantité de mouvement d'un système.

a. Quantité de mouvement.

Définition : Pour un système étendu, la masse et la quantité de mouvement totale du système sont la somme des masses et des quantités de mouvement de l'ensemble des parties du système.
Pour une répartition de points matériels donnée par : $\{M_i, m_i\}$ $i\in[1,N]$,
La masse totale est $m_\Sigma=\sum_{i=1}^{N} m_i$; la quantité de mouvement totale est exprimée par : $\vec{p}_{\Sigma,R}=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_{i,R}$

b. Centre d'inertie.

Définition : Pour un système matériel Σ étendu, on définit le centre d'inertie G du système comme le barycentre de la répartition de masse du système. Pour une répartition de points matériels donnée par : $\{M_i, m_i\}$ $i\in[1,N]$,
le vecteur position du centre d'inertie G est donnée par : $m_\Sigma\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i$

Propriété : Pour un système étendu de masse totale m_Σ et de centre d'inertie G, la quantité de mouvement totale du système dans le référentiel R peut s'écrire sous la forme : $\vec{p}_{\Sigma,R}=m_\Sigma\vec{v}_{G/R}$

Démonstration : On peut partir de la définition du centre d'inertie G : $m_\Sigma\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i$

On dérive alors cette relation par rapport au temps dans le référentiel d'étude R :
$\frac{d}{dt}\left(m_\Sigma\overrightarrow{OG}\right)=m_\Sigma\vec{v}_{G/R}$ et $\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM}_i\right)_R=\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_{i,R}=\vec{p}_{M/R}$, on obtient bien $\vec{p}_{\Sigma,R}=m_\Sigma\vec{v}_{G/R}$.

Propriété : En appliquant le modèle du point matériel à un objet étendu, on étudie en fait le mouvement de translation du centre d'inertie du système étudié.

2. Les lois de Newton, ou les principes de la mécanique newtonienne.

2.1. Première loi de Newton (ou principe d'inertie).

Enoncé : Il existe des référentiels, dits galiléens, pour lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est une translation rectiligne uniforme.

- Une translation rectiligne uniforme est un **mouvement de vecteur vitesse constant**.
- Un point matériel isolé n'est soumis à **aucune action mécanique**.
- La mécanique Newtonienne (ou classique) postule donc l'existence de référentiels galiléens.

Cette année, les référentiels d'études seront supposés galiléens. Par exemple le référentiel terrestre n'est pas parfaitement galiléen mais l'hypothèse reste raisonnable pour la plupart des systèmes étudiés.

- Mouvement relatifs de deux référentiels galiléens :

Si on suppose que deux référentiels R_1 et R_2 sont galiléens, les vecteurs vitesses $\vec{v}_{M/R_1}$ et $\vec{v}_{M/R_2}$ d'un point matériel isolé sont constants dans chacun des référentiels.
$\vec{v}_{M/R_1}$ est de direction fixe dans R_1. R_2 ne peut pas être en rotation par rapport à R_1 puisque dans ce cas la direction du vecteur vitesse du point M étudié serait variable dans R_2. Par conséquent, R_1 et R_2 sont en translation l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire qu'ils partagent le même système d'axe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Il reste à étudier le mouvement relatif de leurs origines.

En reprenant l'expression de la vitesse dans le référentiel R_1 : $\vec{v}_{M/R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_1}$

qu'on traduit $\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{O_2/R_1} + \vec{v}_{M/R_2}$ et on en conclut que $\vec{v}_{O_2}/R_1$ est constant.

Conclusion : Deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

2.2. Actions mécaniques. Troisième loi de Newton.

a. Définitions.

Définition d'une action mécanique : La notion d'action mécanique regroupe tous les phénomènes susceptibles de mettre en mouvement un objet (ou de le déformer si c'est possible).

Actions mécaniques sur un point matériel :

Lorsqu'on considère un point matériel M, l'action mécanique exercée par un système extérieur S sur le point M est décrite par un vecteur nommé vecteur force et généralement noté $\vec{F}_{S \to M}$. Sa norme s'exprime en Newton (N).

Actions mécaniques sur un système matériel :

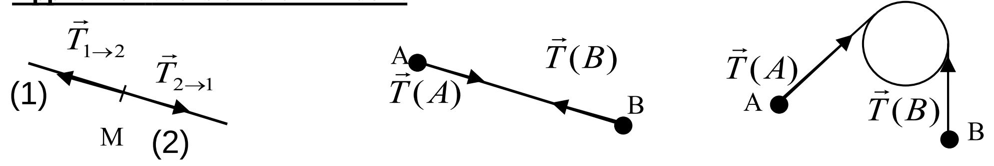
Lorsqu'on considère un système matériel Σ, on pourra définir une action mécanique en précisant le vecteur force qui lui est associé et sur quelle sous partie du système elle s'applique. On reviendra sur ce point quand on étudiera le mouvement d'un solide à la fin de cette séquence de mécanique.

b. Troisième loi de Newton, principe des actions réciproques.

Soient deux points matériels M_1 et M_2. On note $\vec{F}_{1\to 2}$ la force exercée par M_1 sur M_2, et $\vec{F}_{2\to 1}$ la force exercée par M_2 sur M_1. Le principe des actions réciproques affirme que ces deux forces sont de même direction que l'axe (M_1M_2), de même normes et de sens opposés. $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$; $\vec{F}_{1\to 2} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$

Exemple : La force exercée par une personne sur la terre est de même intensité que celle exercée par la terre sur cette personne. Pour la personne, cette force est importante car sa masse est petite, pour la terre, elle est ridicule car sa masse est énorme.

c. Application : tension d'un fil idéal.



On considère un fil tendu entre deux points A et B, et M un point le long du fil.
La tension $\vec{T}_{1\to 2}$du fil est la force exercée par la partie du fil d'un coté de M (1) sur l'autre partie du fil (2). La tension $\vec{T}_{1\to 2}$est orientée de (2) vers (1).

- Le principe d'action réaction affirme que en un point M le long du fil : $\vec{T}_{2\to 1} = -\vec{T}_{1\to 2}$.
- Pour un fil idéal, c'est-à-dire de masse négligeable et inextensible, on montre que les tensions exercées par le fil sur les points A et B sont opposés.
- Pour un fil et une poulie idéale, poulie de masse négligeable et le fil ne glissant pas sur la poulie, on montre alors que les tensions exercées par le fil sur les points A et B sont de même norme.

2.3. Seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique ou loi de la quantité de mouvement).

<u>Enoncé</u> : Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement du point matériel M de masse m est reliée à l'ensemble des forces exercées sur ce point par l'équation : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}_{\to M}$

Pour un système mécanique plus complexe qu'un point matériel, le principe fondamental de la dynamique se traduit simplement par : $\left(\frac{d\vec{p}_{\Sigma/R}}{dt}\right)_R = \sum \vec{F}_{\to \Sigma}$

Pour un système fermé de masse constante et de centre d'inertie G $\left(\frac{d\vec{p}_{\Sigma/R}}{dt}\right)_R = m_\Sigma \vec{a}_{G/R} = \sum \vec{F}_{\to \Sigma}$

3. Mouvement dans le champ de pesanteur terrestre uniforme.

3.1. Étude en négligeant les frottements.

a. <u>Bilan des forces.</u>

b. <u>Application de la seconde loi de Newton.</u>

3.2. Étude en appliquant un modèle de frottement linéaire.

a. <u>Bilan des forces.</u>

b. <u>Application de la loi de la quantité de mouvement.</u>

c. <u>Résolution des lois du mouvement obtenues.</u>

3.3. Etude en appliquant un modèle de frottement quadratique.

a. <u>Bilan des forces.</u>

b. <u>Application de la loi de la quantité de mouvement.</u>

c. <u>Cas particulier de la chute libre sans vitesse initiale.</u>

d. <u>Résolution numérique des équations du mouvement dans le cas général.</u>

Un programme python à disposition sur cahier de prépa permet une résolution numérique des équations du mouvement avec vitesse initiale non nulle :

- ✓ On considère le lancer d'un poids de 7kg par un « beau bébé » en supposant qu'il le lance avec un angle initial de 45°, une vitesse initiale de 14m.s^{-1} et on prend un coefficient β de l'ordre de 10^{-3}kg.m^{-1} (estimation pour une sphère de rayon 10cm dans l'air).

On observe dans ce cas que les trajectoires avec et sans frottement sont quasiment identiques, les frottements sont donc négligeables pour ce type d'étude.

- ✓ On considère le tir d'un volant de badminton de masse 5.10^{-3}kg par un joueur au fond du terrain avec un angle initial de 30°, une vitesse initiale de 100m.s^{-1} depuis une hauteur de 2,5m. On prend un coefficient β de l'ordre de 10^{-3}kg.m^{-1}.

On observe dans ce cas que les trajectoires avec et sans frottement sont très différentes. Celle avec frottement finit en fond de terrain en face alors que celle sans frottement finit à plus de 200m.

4. Oscillations autour d'un point d'équilibre.

4.1. Masse accrochée à un ressort.

a. <u>Ressort orienté horizontalement.</u>
b. <u>Ressort orienté verticalement et masse soumise à des frottements linéaires.</u>

4.2. Pendule simple

a. <u>Système étudié.</u>
b. <u>Etablissement de l'équation du mouvement.</u>
c. <u>Equation du mouvement aux petits angles.</u>

5. Solide en glissement sur un plan incliné.

5.1. Système étudié.

5.2. Situation d'équilibre ou mise en mouvement ?

5.3. Etude du mouvement de glissement.

Capacités exigibles

- Masse d'un système, conservation de la masse d'un système fermé.
- Quantité de mouvement d'un point d'un système de points. Lien avec le vitesse du centre d'inertie.
- Énoncer la première loi de Newton (ou principe d'inertie) comme condition d'existence de référentiels galiléens
- Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- Etablir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
- Exploiter la seconde loi de Newton pour déterminer les équations du mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen.
- Mener l'étude d'un solide dans le champ de pesanteur avec ou sans frottement.
- Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire.
- Établir l'équation du mouvement du pendule simple
- Frottements solide/solide : les lois de Coulomb ne sont pas à connaître mais l'étudiant doit savoir les exploiter pour résoudre un exercice