Exercice 1 : Test d'accélération et de freinage.

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté (vitesse initiale nulle). Avec une accélération constante, elle parcourt un distance D=180m en un temps t_D=15,2s.

1. Poser le problème et exprimer accélération, vitesse et position au cours du temps.
2. Déterminer alors la valeur de l'accélération et la vitesse atteinte à la distance D.

On considère désormais que la voiture est animée d'une vitesse initiale $v_0 = 90\ km\cdot h^{-1}$ sur une trajectoire rectiligne et qu'elle freine avec une accélération constante de norme a_0=4,2m.s^{-2}.

3. Poser le problème et exprimer accélération, vitesse et position au cours du temps.
4. Déterminer alors la durée et la distance de freinage. Faire les A.N.
5. Combien de «g» ressentirait un conducteur si l'on effectuait le même freinage sur une distance de 10m?

Exercice 2 : Etude de trajectoires planes.

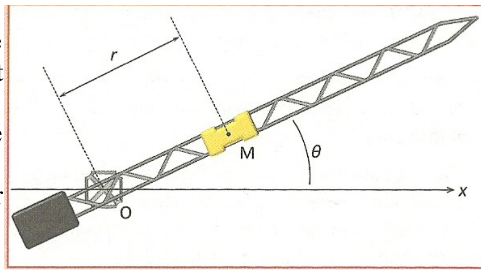
Un point M parcourt une trajectoire dont les coordonnées cartésiennes (x,y) dans le repère orthonormé $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ sont données par : $\begin{cases} x(t)=R\cos(\omega t) \\ y(t)=R\sin(\omega t)\end{cases}$

1. Effectuer la représentation graphique de la trajectoire du point M à l'aide de votre calculatrice et la reproduire. Identifier la courbe représentative de la trajectoire.
2. Introduire une base de projection polaire et indiquer les expressions des coordonnées du point M dans cette base. Exprimer le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans cette base.

On considère maintenant qu'un point M parcourt la trajectoire en coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ telle que : $\begin{cases} x(t)=a\cos(\omega t) \\ y(t)=b\sin(\omega t)\end{cases}$ (on se placera dans le cas a >b).

3. Effectuer une représentation graphique de la trajectoire du point M à l'aide de votre calculatrice et la reproduire. Identifier la courbe représentative de la trajectoire.
4. Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en un point de la trajectoire.
5. Faire une représentation graphique de la vitesse et de l'accélération en un point quelconque de la trajectoire. Représenter la base de Frenet en ce point.
6. Indiquer si la vitesse du mobile le long de la trajectoire augmente ou diminue sur les différentes sections de la trajectoire.
7. Exprimer la vitesse et l'accélération en A intersection de la trajectoire avec le demi-axe (Ox). En déduire le rayon de courbure de la trajectoire en A. Représenter le cercle osculateur en A.

Exercice 3 : Trajectoire spirale.



Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal Oxy à la vitesse angulaire constante ω_O. Sur ce bras, un chariot modélisé par un point M se déplace à la vitesse constante v_O.
A l'instant initial, le bras est aligné sur l'axe Ox, et le chariot est situé à une distance r_O de l'axe de rotation.

1. Introduire la base polaire adaptée et exprimer le vecteur position du point M en coordonnées polaires.
2. Etablir l'équation de la trajectoire r(θ).
3. Etablir les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.
4. Faire une représentation graphique de la trajectoire et représenter en un point quelconque la base polaire, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Placer un repère de Frenet et indiquer si la norme de la vitesse varie au cours du temps.
5. Décrire le mouvement du chariot vu d'un observateur installé dans la cabine de la grue. Exprimer accélération, vitesse et position dans le système de coordonnées adapté.

Exercice 4 : Tir balistique.

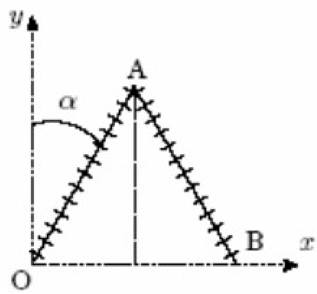
Un archer tire un projectile à la vitesse de norme v_O selon un angle α par rapport à l'horizontale donnant la direction de la cible qu'il vise. En négligeant tout frottement, le mouvement du projectile se fait à accélération constante dirigée selon la verticale vers le bas et de norme g = 9,8 m.s^{-2}. Pour simplifier l'étude, on supposera que le centre de la cible est situé à la même hauteur que le point de départ de la flèche.

1. Exprimer l'accélération, la vitesse et la position de la flèche pour tout instant t.
2. Déterminer la flèche de la trajectoire, c'est à dire l'altitude maximale atteinte par le projectile ainsi que l'abscisse pour laquelle cette flèche est atteinte.

La cible est située à une distance d = 70m.

3. Montrer qu'il existe une vitesse initiale minimale v_{min} à communiquer au projectile pour qu'il puisse atteindre la cible. Faire l'AN. Montrer ensuite que pour une vitesse $v_O > v_{min}$ il existe deux angles possibles pour atteindre la cible. Expliquer les noms donnés à ces trajectoires : tir tendu ou tir en cloche. Evaluer numériquement ces deux angles pour $v_O = 2\ v_{min}$.

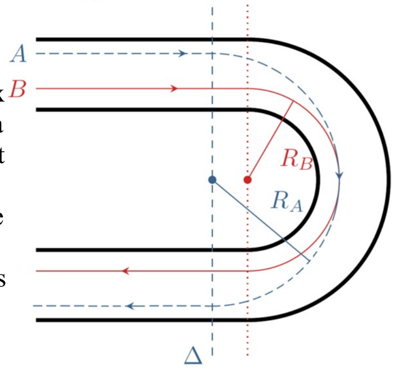
Exercice 5: Glissade d'une échelle.



Une échelle double est posée sur le sol, un des points d'appui de l'ensemble restant constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'échelle à un instant t est repérée par l'angle α(t) formé par la portion [OA] de l'échelle avec le mur. L'extrémité B de l'échelle glisse sur le sol. L'échelle est telle que OA=AB=ℓ.

1. Exprimer la position la vitesse et l'accélération du point A dans la base adaptée.
2. Exprimer la position, la vitesse et l'accélération du point B dans la base adaptée.

Exercice 6 : virage à la corde.



Lorsqu'ils prennent un virage lors d'un grand prix, les pilotes ont le choix entre deux trajectoires (A et B). On veut déterminer la durée du trajet de la voiture entre les deux instants où la trajectoire coupe l'axe Δ en supposant qu'elle est parcourue à vitesse constante. On note R_A = 90 m et R_B = 75 m. L'accélération de la voiture doit rester inférieure à 0,8g avec g la constante de pesanteur pour éviter de déraper et de sortir de la piste.

1. Quelle est la trajectoire permettant de prendre ce virage « le plus rapidement possible » ?

Exercice 7 : Distance à la surface de la terre.

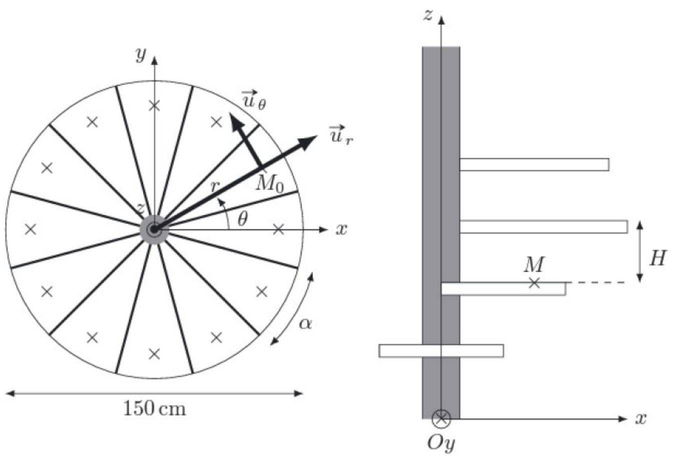
On considère deux points A et B à la surface de la terre de rayon R = 6400km, situés à la même colatitude θ=40°, A situé à la longitude nulle et B situé à la longitude φ = 75°.

1. Exprimer la distance parcourue entre ces deux points en suivant un parallèle. Faire l'A.N.
2. Exprimer les coordonnées des points A et B dans une base cartésienne bien choisie et en déduire la longueur du segment liant A et B.
3. Exprimer alors l'angle α d'ouverture de la portion de cercle de centre O, le centre de la terre reliant les points A et B. En déduire la longueur de cette portion de cercle. Faire l'A.N.

Exercice 8 : Escalier en colimaçon.

Un escalier en colimaçon (hélicoïdal) est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. La figure de gauche (vue de dessus) fait apparaitre l'angle de marche α=30°. La figure de droite représente les quatre premières marches et définit la hauteur de marche H = 20 cm.

Un usager, assimilé à un point matériel M, monte à l'étage d'une démarche régulière à raison d'une marche par intervalle de temps Δt de une seconde en restant à la distance r = 60 cm de Oz. Sur la figure de gauche M_O est le projeté de M sur un plan perpendiculaire à Oz. Les croix représentent les positions successives de M_O, pointées lorsque l'usager est sur une marche.



1. Déterminer la vitesse d'ascension $\dot{z}$ de l'usager. (Faire l'A.N). puis en déduire l'expression de z(t).
2. Déterminer la vitesse de rotation $\Omega = \dot{\theta}$. Faire l'application numérique.
3. Exprimer alors le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base de projection cylindrique adaptée.
4. Evaluer numériquement la norme de la vitesse ainsi que l'angle de la pente équivalente à l'ascension de cet escalier en degré puis en « pourcentage ».