

Problème 1 : Traitement du signal d'un magnétomètre.
Expression du signal électrique à étudier.

1. Les relations fournies $e(t) = -S \frac{dB}{dt}$ et $B = \mu H - a H^3$ amène à l'expression $e(t) = -S\mu \frac{dH}{dt} + 3SaH^2 \frac{dH}{dt}$.

2. On sait que $H = ni(t) + \frac{B_0}{\mu}$, on l'injecte dans l'expression précédente ce qui donne :

$$e(t) = -S\mu n \frac{di}{dt} + 3Sa \left(ni(t) + \frac{B_0}{\mu} \right)^2 n \frac{di}{dt} \text{ où } i(t) = I_m \sin(\omega_e t) \text{ et } \frac{di}{dt}(t) = \omega_e I_m \cos(\omega_e t)$$

$$\text{On en déduit } e(t) = -S\mu n \omega_e I_m \cos(\omega_e t) + 3Sa \left(n I_m \sin(\omega_e t) + \frac{B_0}{\mu} \right)^2 n \omega_e I_m \cos(\omega_e t)$$

$$e(t) = -S\mu n \omega_e I_m \cos(\omega_e t) + 3Sa \left(n^2 I_m^2 \sin^2(\omega_e t) + 2 \frac{B_0}{\mu} n I_m \sin(\omega_e t) + \left(\frac{B_0}{\mu} \right)^2 \right) n \omega_e I_m \cos(\omega_e t)$$

On montre par les formule de trigonométrie que $\sin(\omega_e t) \cos(\omega_e t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_e t)$ et que

$$\sin^2(\omega_e t) \cos(\omega_e t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega_e t)) \cos(\omega_e t) = \frac{1}{4} \cos(\omega_e t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega_e t)$$

$$\text{ce qui donne } e(t) = S n \omega_e I_m \left(\frac{3}{4} a n^2 I_m^2 - \mu + 3a \left(\frac{B_0}{\mu} \right)^2 \right) \cos(\omega_e t) + 3Sa \frac{B_0}{\mu} \omega_e n^2 I_m^2 \sin(\omega_e t) + \frac{3}{4} S \omega_e a n^3 I_m^3 \cos(3\omega_e t)$$

On obtient bien l'expression donnée dans l'énoncé avec la constante $K_2 = 3aS(nI_m)^2 \omega_e \left(\frac{B_0}{\mu} \right)$

Conception du filtre passe bande.

3. Pour un filtre passe bande d'ordre 2 : $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ Où H_0 est le gain statique, Q le facteur

de qualité et ω_0 la pulsation propre.

4. Le gain associé s'exprime : $G(\omega) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$

Il passe par un maximum lorsque $f(\omega) = 1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ passe par un minimum obtenu lorsque $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 0$

Le gain du filtre passe bande passe donc par un maximum lorsque $\omega = \omega_0$ et alors $G_{max} = G(\omega_0) = |H_0|$

5. Par définition, la bande passante est l'ensemble des fréquences pour lesquelles le gain en décibel du filtre est supérieur au gain en décibel maximum -3dB ce qui se traduit par un gain supérieur au gain maximum divisé par $\sqrt{2}$. La largeur de la bande passante d'un filtre passe bande d'ordre 2 est donnée par $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

6. A BF : $\underline{H}(j\omega) = jH_0 \frac{\omega}{Q\omega_0}$ ce qui amène à la relation entre les tensions complexes $\underline{s}(t) = \frac{H_0}{Q\omega_0} (j\omega) \underline{e}(t)$

qui se traduit pour les tensions réelles par $s(t) = \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{de}{dt}(t)$.

On obtient bien un comportement dérivateur du filtre à basse fréquence.

7. A HF : $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0\omega_0}{Qj\omega}$ ce qui amène à la relation entre les tensions complexes $(j\omega) \underline{s}(t) = H_0 \frac{\omega_0}{Q} \underline{e}(t)$

qui se traduit pour les tensions réelles par $\frac{ds}{dt}(t) = H_0 \frac{\omega_0}{Q} e(t)$ puis $s(t) = H_0 \frac{\omega_0}{Q} \int e(t) dt$

On obtient bien un comportement intégrateur du filtre à haute fréquence.

8. Pour mesurer B_0 via la constante K_2 , il faut que le filtre sélectionne la pulsation $2\omega_e$, il faut donc que la pulsation propre du filtre soit réglée sur cette pulsation : $\omega_0 = 2\omega_e$

9. On souhaite que le rapport des amplitudes soit divisé par 10 Il faut donc que $\frac{G(\omega_e)}{G(2\omega_e)} = \frac{1}{10}$.

En prenant la forme asymptotique basse fréquence du gain pour ω_e on obtient $G(\omega_e) = H_o \frac{\omega_e}{Q \cdot 2\omega_e}$

En tenant compte de la question précédente $G(2\omega_e) = H_o$ on obtient donc $\frac{\omega_e}{Q \cdot 2\omega_e} = \frac{1}{10}$ et $Q=5$

Pour l'harmonique de rang 3 à haute fréquence $G(3\omega_e) = H_o \frac{2\omega_e}{Q \cdot 3\omega_e}$ on obtient donc $\rho = \frac{2}{15}$

10. Par définition, l'impédance Z d'un dipôle est le facteur de proportionnalité entre la tension complexe uax bornes du dipôle et l'intensité complexe du courant qui traverse le dipôle $\underline{U} = Z \cdot \underline{I}$.

L'admittance Y d'un dipôle est l'inverse de son impédance soit $Y = \frac{1}{Z}$.

Pour un conducteur ohmique de résistance R $Y_R = \frac{1}{R}$ et pour un condensateur de capacité C $Y_C = jC\omega$.

11. Dans le modèle idéal de l'ALI :

- La résistance d'entrée tend vers l'infini et les intensités des courants entrant par les bornes d'entrée inverseuse i^- et non inverseuse i^+ sont nulles $i^- = i^+ = 0$
- La résistance de sortie tend vers zéro, l'intensité du courant en sortie de l'ALI est cependant limité par l'intensité de saturation i_{sat} .

12. On observe sur le circuit une boucle de rétroaction sur la borne d'entrée inverseuse. On peut alors faire l'hypothèse d'une égalité des potentiels sur les bornes d'entrée ; $V^+ = V^-$

13. La loi des nœuds en terme de potentiel en A donne : $Y_1(e - V_A) + Y_2(0 - V_A) + Y_4(s - V_A) + Y_5(V^- - V_A) = 0$

La loi des nœuds en terme de potentiel en - donne $Y_5(V_A - V^-) + Y_3(s - V^-) = 0$.

Le circuit montre que $V^+ = 0$ s et la relation issue de l'hypothèse de fonctionnement linéaire donne $V^- = V^+ = 0$

On traduit la seconde relation par $V_A = \frac{-Y_3}{Y_5} s$ qu'on réinjecte dans la première pour obtenir :

$$Y_1 e = -Y_4 s - (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5) \frac{Y_3}{Y_5} s \text{ d'où } Y_1 Y_5 e = -Y_4 Y_5 s - (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5) Y_3 s$$

$$\text{On obtient bien alors } H = \frac{s}{e} = \frac{-Y_1 Y_5}{Y_4 Y_5 + Y_3 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)}$$

14. A BF le circuit équivalent est donné ci contre :

Il n'y a aucun courant dans la résistance connectant la sortie à la borne - d'où $V^+ = V^- = s = 0$

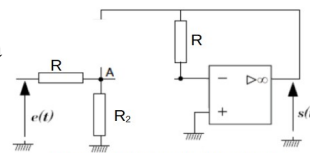
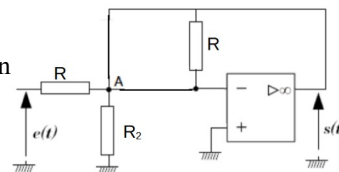


Figure 3. Circuit du filtre de Rauch proposé

A HF le circuit équivalent est donné ci contre :

Un fil connecte la sortie à A puis un fil connecte A à -. On en déduit $V^+ = V^- = V_A = s = 0$



On réalise bien ici un filtre passe bande.

15. On remplace dans l'expression précédente les admittances ce qui donne :

$$H = \frac{\frac{-1}{R} jC\omega}{(jC\omega)^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} + jC\omega + jC\omega \right)} \text{ On multiplie en haut et en bas par } \frac{R}{2jC\omega}$$

$$\text{On obtient } H = \frac{-1/2}{j \frac{R}{2} C\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{jC\omega} + 1} \text{ de la bonne forme } H = \frac{H_o}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)}$$

par identification
$$\begin{cases} H_o = -1/2 \\ \frac{RC}{2} = \frac{Q}{\omega_o} \\ \frac{R+R_2}{2RR_2C} = Q\omega_o \end{cases} \quad \text{ce qui donne bien} \quad \begin{cases} H_o = -1/2 \\ \omega_o = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \\ Q = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} \end{cases}$$

On utilise une résistance $R=10k\Omega$; on suppose qu'on souhaite fixer le facteur de qualité à $Q=5$.

16. On souhaite obtenir un facteur de qualité de 5 ce qui donne $4Q^2 = 1 + \frac{R}{R_2}$

En négligeant 1 devant $4Q^2=100$, on obtient $R_2 = \frac{R}{4Q^2}$ A.N : $R_2 = 100\Omega$

On souhaite une fréquence propre $f_o=2f_c=10kHz$ ce qui donne $4\pi f_e = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + \frac{R}{R_2}} = \frac{2Q}{RC}$

Finalement $C = \frac{Q}{2\pi R f_e}$ A.N : $C = \frac{Q}{2\pi R f_e} = 1,6 \cdot 10^{-8} F$

17. Pour les études asymptotiques du gain, on reprend les éléments de la question 6.

A BF $\underline{H}(j\omega) = j \frac{H_o \omega}{Q \omega_o}$ d'où $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H_o| - 20 \log Q + 20 \log \frac{\omega}{\omega_o}$

A HF $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o \omega_o}{Q j \omega}$ d'où $G_{dB}(\omega) = 20 \log |H_o| - 20 \log Q - 20 \log \frac{\omega}{\omega_o}$

en $\omega=\omega_o$ $\underline{H}(j\omega) = H_o$ d'où $G_{dB}(\omega_o) = 20 \log |H_o|$

On exprime alors numériquement les différents éléments :

$20 \log |H_o| \approx -6 dB$; $20 \log Q \approx 14 dB$

on trace alors le diagramme de Bode en amplitude ci contre.

Détection synchrone.

18. D'après l'énoncé, le signal demandé s'écrit sous la forme :

$$s_2(t) = G(s_p(t) + b(t)) s_{ref}(t) = G K_2 A \sin^2(2\omega_e t) + s_{ref}(t) b(t)$$

Avec les formules de trigonométrie on le réexprime :

$$s_2(t) = \frac{G}{2} K_2 A - \frac{G}{2} K_2 A \cos(4\omega_e t) + s_{ref}(t) b(t)$$

La composante constante de ce signal est donnée par sa moyenne. On sait que $\langle s_2 \cos(4\omega_e t) \rangle = 0$ et $\langle s_{ref}(t) b(t) \rangle = 0$

on en déduit que la composante constante recherchée est $\langle s_2(t) \rangle = \frac{G}{2} K_2 A$

19. La forme canonique demandée est $\underline{H}_{Pbas}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + j \frac{\omega}{Q \omega_o} - \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}$. La valeur du facteur de qualité

permettant d'obtenir une fréquence de coupure égale à la fréquence propre du filtre est $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Par définition, la pulsation de coupure à -3dB est la pulsation pour laquelle le gain est égal à la valeur maximale du gain divisée par $\sqrt{2}$ équivalent à la valeur maximale du gain en décibel -3dB.

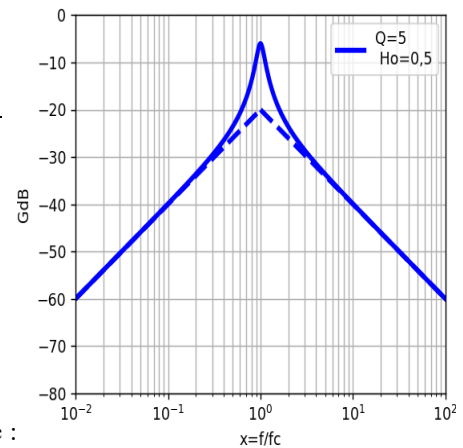
A la fréquence propre pour le filtre Pbas2, $\underline{H}_{Pbas}(j\omega_o) = \frac{H_o}{j}$ ainsi le gain est $G_{Pbas}(\omega_o) = H_o Q$

Pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on observe donc que $G_{Pbas}(\omega_o) = \frac{H_o}{\sqrt{2}}$, on sait de plus que le filtre ne présente pas de résonance et que

$G_{Pbas;max} = H_o$; on en déduit donc bien que $G_{Pbas}(\omega_o) = \frac{G_{Pbas;max}}{\sqrt{2}}$ et donc que $\omega_o = \omega_c$ lorsque $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

20. On souhaite que $\forall f > f_{seuil} \quad G_{Pbas}(f) < 10^{-2}$ cette condition est vérifiée à condition que $G_{Pbas}(f_{seuil}) < 10^{-2}$
La fréquence seuil est donc dans le domaine haute fréquence pour lequel la fonction de transfert

$\underline{H}_{Pbas}(j\omega) \rightarrow H_o \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2$ ainsi $G_{Pbas}(f_{seuil}) = H_o \left(\frac{f_c}{f_{seuil}}\right)^2 < 10^{-2}$ ce qui donne $f_c = \frac{f_{seuil}}{10 \sqrt{(H_o)}} = \frac{f_{seuil}}{10}$



21. Dans les conditions décrites, le signal de sortie est la composante constante du signal $s_2(t)$ soit

$$s_3(t) = \langle s_2(t) \rangle = \frac{G}{2} K_2 A$$

Ajout d'un courant de compensation.

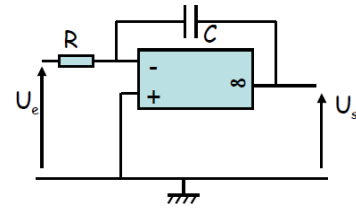
22. Le circuit intégrateur vu en cours présente l'allure suivante.

On observe une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse : $V^+ = V^-$

D'après le schéma : $V^+ = 0$ et LNP en - donne $\frac{U_e - V^-}{R} + (U_s - V^-) jC \omega = 0$

On obtient : $U_e + U_s jRC \omega = 0$

La fonction de transfert est alors $\frac{U_s}{U_e} = -\frac{1}{jRC \omega}$



Par retour aux notations réelles on obtient $U_e + RC \frac{dU_s}{dt} = 0$ ce qui donne $U_s(t) - U_s(t_0) = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t U_e(t') dt'$

Ce circuit présente donc bien un caractère intégrateur.

23. A la sortie du système de détection synchrone, le système produit le signal $s_3(t) = \frac{G}{2} K_2 A$ avec K_2 qui dépend du champ magnétique au niveau de la bobine de mesure ($B_O - B_{comp}$) de la forme ($B_O - n_O \mu i_{comp}$) où n_O est le nombre de spires dans la bobine de mesure.

Ce signal est intégré puis converti en un courant de compensation $i_{comp}(t) = i_O + \frac{M}{RC} \int (B_O - n_O \mu i_{comp}) dt$ où M donne le facteur de proportionnalité final entre s_3 et le champ magnétique sous la forme $s_3(t) = M (B_O - B_{comp})$

Lorsque la compensation n'est pas établie, le courant augmente et le champ de compensation augmente jusqu'à ce que le champ total s'annule, le courant de compensation est alors constant à i_O .

24. La grandeur permettant alors de connaître B_O est l'intensité du courant i_O tel que $B_{tot} = 0 = (B_O - n_O \mu i_O)$ ce qui donne finalement $B_O = n_O \mu i_O$.

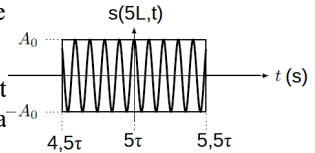
Problème 2 : étude d'une onde sinusoïdale tronquée.

1. On établit qu'une OPUND sinusoïdale s'écrit $s'(x,t) = A \cos\left(2\pi f_o \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = A \cos\left(2\pi f_o t - \frac{2\pi}{\lambda_o} x\right)$

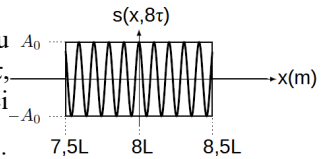
On retrouve ainsi le lien $\lambda_o = \frac{c}{f_o}$. On rappelle que $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient alors $\lambda_o = 2,21 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ on tombe dans le domaine des micro-ondes.

2. Lorsque la fin du paquet d'onde est émise en $t = \tau/2$, le début du paquet d'onde émis en $t = -\tau/2$ s'est propagée sur la distance $L = c\tau$. Dans le modèle de l'OPUND, cette distance reste invariante au cours de la propagation. On obtient $L = 3,30 \cdot 10^4 \text{ m}$.

3. Pour parcourir la distance $5L$ il faut au paquet d'onde une durée 5τ ; le paquet d'onde arrivera donc en ce point entre les instants $4,5\tau$ et $5,5\tau$. La représentation graphique demandée est ci contre.



4. Le départ du paquet a lieu en $x=0$ en $t = -\tau/2$, à l'instant $t = 8\tau$ il a donc parcouru une distance $8,5L$. La fin d'émission du paquet a lieu en $t = \tau/2$, à l'instant $t = 8\tau$, il a parcouru une distance $7,5L$. La représentation graphique demandée est ci contre.



5. Sur la durée d'un paquet d'onde il s'écoule un nombre N de périodes ce qui donnent $NT = \frac{N}{f_o} = \tau$, on en déduit $N = \tau f_o$; l'A.N. donne $N = 1,50 \cdot 10^6$. Cette application numérique montre que les représentations graphiques proposées ne respectent pas le rapport d'échelle entre la durée τ et la période T . Elles sont clairement faites pour faciliter la compréhension du paquet d'onde étudié.

6. On nous donne $s(0,t) = e(t)$. On sait que l'expression générale d'une OPUND est de la forme

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ et qu'alors } s(0,t) = f\left(t - \frac{0}{c}\right) = f(t) \text{ on en déduit que } s(x,t) = e\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

ce qui donne $s(x,t) = A\left(t - \frac{x}{c}\right) \cos\left(2\pi f_o \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$ avec $A\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} A_o & \text{pour } -\tau/2 \leq t - \frac{x}{c} \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

7. Pour effectuer un allé-retour, il faut au paquet d'onde une durée $t_v = \frac{2d}{c}$.

8. La différence de temps de vol s'exprime $t_v' - t_v = 2 \frac{d' - d}{c}$ on souhaite que $t_v' - t_v \geq \frac{\tau}{2}$ on distinguera des

surfaces réfléchissantes séparées d'une distance $d' - d = c \frac{\tau}{2} = \frac{L}{2} = 1,65 \cdot 10^4 \text{ m}$ on serait alors incapable de distinguer la surface de l'océan et le fond de la fosse des Mariannes point le plus profond de l'océan terrestre. Cette méthode est donc parfaitement inefficace.

9. On déduit de l'énoncé $d' - d = \frac{\lambda_o}{2} = 1,10 \cdot 10^2 \text{ m}$; la performance se rapproche nettement de la performance réelle du satellite mais surestime encore cette dernière.

10. Le phénomène expliquant le décalage de fréquences entre les ondes émises et réfléchies est l'effet Doppler.

11. L'onde réfléchie se propage dans le sens rétrograde de l'axe (Ox). Elle s'écrit donc sous la forme :

$s_R(x,t) = A' \left(t + \frac{x}{c}\right) \cos\left(2\pi f_o' \left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$ on observe bien que le déphasage de cette onde avec l'onde émise en $(x,t) = (0,0)$ est égale à φ .

12. Le déphasage s'exprime $2\pi f_o' \left(t + \frac{vt}{c}\right) + \varphi - 2\pi f_o \left(t - \frac{vt}{c}\right)$ on en déduit

$$2\pi f_o' \left(1 + \frac{v}{c}\right) + \varphi - 2\pi f_o \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 0 \text{ pour que le déphasage soit constant au niveau de la surface}$$

$$\text{réfléchissante ce qui amène la relation } \frac{f_o'}{f_o} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

13. Par une approximation affine de la relation précédente, validée par le fait que $\delta f \ll f_o$, on obtient

$$f_o' = f_o \left(1 - 2 \frac{v}{c}\right) \text{ on obtient donc } \delta f = \frac{2vf_o}{c} \text{ ce qui donne } v = \frac{c \delta f}{2f_o} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Résolution de problème :

1. On observe que le signal à conserver présente 30 périodes sur l'intervalle de temps -0,03 à 0,03 ce qui donne une période $T=2,0 \cdot 10^{-3}$ s et donc une fréquence $f=500$ Hz.
On doit donc conserver ce signal en éliminant le signal à 50 Hz du réseau EDF.
Avec les deux composants fournis, Il faut donc utiliser un filtre passe haut d'ordre 1 de fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{H_o j \frac{f}{f_o}}{1 + j \frac{f}{f_o}} \text{ dont la fréquence de coupure } f_o \text{ est comprise entre les fréquences } f_e = 50 \text{ Hz et } f_s = 500 \text{ Hz.}$$

On peut proposer un filtre C, R en série où la tension de sortie est mesurée aux bornes de R de gain statique $H_o=1$ et de fréquence de coupure $f_o = \frac{1}{2\pi RC}$

On cherche à conserver au maximum l'amplitude du signal et à atténuer le signal EDF d'un facteur 10 par exemple.

On obtient alors $G(f_e) \approx \frac{f_e}{f_o} \approx \frac{1}{10}$ ce qui amène à une fréquence de coupure $f_o = f_e = f_s$ le signal étudié sera alors atténué d'un facteur $\sqrt{2}$.

On souhaite donc que $f_o = \frac{1}{2\pi RC} = 500$ on prend pour valeur arbitraire une résistance $R = 1,0 \text{ M}\Omega$; on obtient alors pour valeur de la capacité $C = \frac{1}{2\pi R f_o} = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ F}$

On peut alors faire comme observation qu'un filtre passe haut d'ordre 2 avec un facteur de qualité $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ aurait permis une meilleure performance de conservation du signal étudié en atténuant tout autant le signal EDF bruiteur.