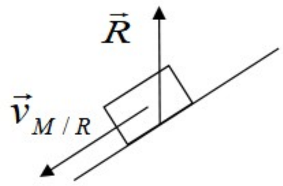
Approche énergétique du mouvement d'un point matériel.

1. Puissance et travail d'une force. Théorème de l'énergie cinétique.

1.1. Puissance d'une force dans un référentiel.

Définition : Soit une force $\vec{F}$s'appliquant sur un point matériel M animé dans le référentiel d'étude R d'une vitesse $\vec{v}_{M/R}$. La puissance $P_{\vec{F};M/R}$de la force s'exprime dans le référentiel R par : $P_{\vec{F};M/R}=\vec{F}.\vec{v}_{M/R}$.
La puissance s'exprime en W.

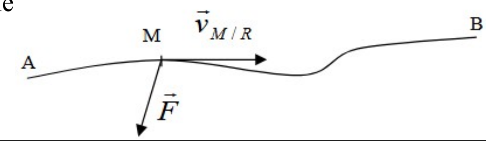
Exemple : On considère un pavé posé sur un plan incliné et glissant le long de ce plan. La puissance de la réaction s'exprime : $P_{\vec{R};M/R}=\vec{R}.\vec{v}_{M/R}$.
Pour un contact sans frottement, la composante tangentielle de la réaction est nulle, la puissance de la réaction est nulle$P_{\vec{R};M/R}=0$
Sinon, la composante tangentielle est de sens opposé à la vitesse est alors$P_{\vec{R};M/R}<0$
La force de frottement est une force résistante.



Propriétés : Une force est dite motrice lorsque sa puissance dans le référentiel d'étude est positive, elle est dite résistante lorsque sa puissance dans le référentiel d'étude est négative.

1.2. Travail d'une force dans un référentiel.

On considère un point matériel M qui suit une trajectoire (C) entre le point de départ A (instant t_A) et le point d'arrivée B (instant t_B).



Définition : Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ en M s'exprime : $\delta W=P_{\vec{F};M/R}dt=\vec{F}.\vec{v}_{M/R}.dt=\vec{F}.d\overrightarrow{OM}$. Le travail est homogène à une énergie, il s'exprime en Joule (J).

On constate que le travail élémentaire est relié à la puissance par une intégration temporelle et qu'il est relié à la force elle-même par une intégration « le long de la trajectoire ».

Pour exprimer le travail d'une force, on a alors deux possibilités :

- Partir de l'expression de la puissance. Sommer les travaux élémentaires revient alors à intégrer en fonction du temps. $W_{A\to B}=\int \delta W=\int_{t_A}^{t_B} P_{\vec{F};M/R}dt$.
- Partir de la forme 'spatiale'. Sommer les travaux élémentaires revient alors à intégrer le long de la trajectoire. $W_{A\to B}=\int \delta W=\int_{A\overset{C}{\to}B} \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$. Le travail d'une force $\vec{F}$ s'appliquant au point matériel M s'exprime comme la **circulation** de la force de A en B le long de la trajectoire (C).

Définition : On appelle circulation $C_{\vec{G},\Gamma}$ d'un champ vectoriel$\vec{G}(M,t)$ le long d'une courbe (Γ) la grandeur exprimée par : $G_{\vec{G},\Gamma}=\int_{A\overset{C}{\to}B} \vec{G}(M,t).d\overrightarrow{OM}$

Exemple de calcul : Prenons le cas d'une force constante $\vec{F}_C$. $W_{A\to B}=\vec{F}_C \int_{A(c)B} d\overrightarrow{OM}=\vec{F}_C.\overrightarrow{AB}$

1.3. Energie cinétique et lois d'évolution de l'énergie cinétique.

a. Grandeur énergétique cinématique.

Définition : Soit un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/R}$ dans le référentiel d'étude R. L'énergie cinétique de ce point matériel s'exprime : $E_{C;M/R}=\frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/R}\|^2$

b. Lien entre travail des forces et énergie cinétique.

On écrit la seconde loi de Newton pour un point matériel M de masse m dans le référentiel R supposé galiléen et On effectue un produit scalaire de chaque terme avec le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}$. $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R\vec{v}_{M/R}=\sum\left(\vec{F}_{\to M}.\vec{v}_{M/R}\right)$

On sait de plus que : $\vec{p}_{M/R}=m\vec{v}_{M/R}$ on en conclut que : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R\vec{v}_{M/R}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\vec{v}_{M/R}\right)^2\right)$

On reconnaît dans le terme de droite les puissances associées à chaque force : $\sum\left(\vec{F}_{\rightarrow M}.\vec{v}_{M/R}\right)=\sum P_{\vec{F}\rightarrow M}$

On obtient donc une première écriture : $\frac{d}{dt}\left(E_{C;M/R}\right)=\sum P_{\vec{F}\rightarrow M}$

On multiplie alors par une durée infinitésimale dt : $d\left(E_{C;M/R}\right)=\sum P_{\vec{F}\rightarrow M}.dt=\sum \delta W_{\vec{F}\rightarrow M}$

On obtient ainsi la seconde écriture : $d\left(E_{C;M/R}\right)=\sum \delta W_{\vec{F}\rightarrow M}$

En intégrant le long de la trajectoire (C) suivie par le point matériel entre les points A et B, on obtient alors la troisième écriture : $\left(E_C(B)-E_C(A)\right)=\sum W_{A\rightarrow B}$

c. Enoncés des lois.

Les lois d'évolution de l'énergie cinétique pour un point matériel découlent directement de la seconde loi de Newton, elles ne permettent donc pas d'obtenir des renseignements supplémentaires sur le système étudié. Cependant, l'approche énergétique s'avère parfois beaucoup plus intéressante à exploiter que l'approche dynamique pure.

Loi de la puissance cinétique : On étudie le mouvement d'un point M dans un référentiel galiléen. La loi de la puissance cinétique s'exprime alors sous la forme : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{C;M/R}\right)=\sum P_{\vec{F}\rightarrow M}}$

Loi de l'énergie cinétique : On considère un point matériel M qui se déplace dans le référentiel R supposé galiléen le long d'une trajectoire (C) entre les points A et B.

La variation de l'énergie cinétique lors d'un petit déplacement le long de la trajectoire (C) est donnée par l'écriture locale de la loi de l'énergie cinétique : $\boxed{d\left(E_{C;M/R}\right)=\sum \delta W_{\vec{F}\rightarrow M}}$

La variation totale de l'énergie cinétique entre les points A et B est donnée par l'écriture intégrale de la loi de l'énergie cinétique : $\boxed{\left(E_C(B)-E_C(A)\right)=\sum W_{A\rightarrow B}}$

1.4. Exemple d'application de la loi de l'énergie cinétique.

On considère une moto lancée sur une route supposée horizontale à la vitesse initiale v_O. Elle freine avec une force résistante constante de norme F. On veut déterminer la distance d parcourue avant son arrêt total.

- On travaille avec une base de projection cartésienne telle que la vitesse s'exprime $\vec{v}_O=v_O\vec{e}_x$.
- La force résistante $\vec{F}$s'exprime alors $\vec{F}=-\vec{F}.\vec{e}_x$ On en déduit l'expression de son travail élémentaire $\delta W_{\vec{F}}=\vec{F}.d\overrightarrow{OM}=-Fdx$ puis de son travail total $W_{\vec{F}}=-Fd$
- Le poids est vertical perpendiculaire à la vitesse, son travail est donc nul.
- Les roues roulent sans glisser sur la route, le travail des réactions de la route sur les roues est donc nul.
- On applique la loi de l'énergie cinétique$E_{C,finale}-E_{C,initiale}=-Fd$. On obtient alors$d=\frac{mv_O^2}{2F}$

L'utilisation de la loi de l'énergie cinétique permet de déterminer la distance d'arrêt d uniquement à partir de la connaissance de l'état initial et de l'état final du système étudié sans se soucier du détail de l'évolution temporelle de sa vitesse ou de sa position.

2. Champ de force conservatif et Energie potentielle.

2.1. Premier exemple, la force de gravité à la surface de la Terre.

2.2. Deuxième exemple, la force de rappel élastique.

2.3. Troisième exemple, les forces centrales Newtoniennes.

2.4. Généralisation du lien entre force conservative et énergie potentielle.

a. Enoncé des propriétés des forces conservatives.

Définition : Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle dérive d'une fonction scalaire du seul vecteur position que l'on nomme alors énergie potentielle $E_{P,\vec{F}}$.

Propriété : Le travail élémentaire de la force $\delta W_{\vec{F}}$ s'exprimera alors par la relation : $\delta W_{\vec{F}}=-d\left(E_{P,\vec{F}}(M)\right)$

Le travail de la force pour aller de A en B ne dépend plus de la trajectoire mais uniquement des points de départ et d'arrivée : $W_{\vec{F};A\rightarrow B}=E_{P,\vec{F}}(A)-E_{P,\vec{F}}(B)$

La force s'exprime de manière générale sous la forme : $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\left(E_P\right)(M)$

L'opérateur employé est nommé gradient et son introduction complète est l'objet d'un polycopié…

b. Retour sur le premier exemple.

c. Retour sur le troisième exemple.

d. Etude d'un exemple supplémentaire : le piège de Penning.

3. Etude des systèmes conservatifs à un degré de liberté.

3.1. Introduction de l'énergie mécanique et des systèmes conservatifs.

Reprenons la loi de l'énergie cinétique et écrivons sa forme locale : $d\left(E_{C;M/R}\right)=\sum \delta W_{\to M}$

Distinguons alors les forces conservatives et les forces non conservatives, et réécrivons ce théorème.

$d\left(E_{C;M/R}\right)=\delta W_{N.C.\to M}+\delta W_{C\to M}$ soit $d\left(E_{C;M/R}\right)=\delta W_{N.C.\to M}-d\left(E_{P;M}\right)$

Finalement $d\left(E_{C;M/R}+E_{P;M}\right)=\delta W_{N.C.\to M}$

On voit ainsi apparaître une nouvelle énergie caractéristique du point matériel M considéré dans le problème. Cette énergie est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatives dans le problème étudié.

Définition : Dans un problème où on considère un point matériel M soumis (entre autres) à des forces conservatives, on définit l'énergie mécanique du point matériel comme la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles associées aux forces conservatives. $\boxed{E_M=E_{C;M/R}+E_{P;M}}$

Enoncé : La loi de l'énergie cinétique se réexprime alors en fonction de l'énergie mécanique de la manière suivante. Les variations de l'énergie mécanique d'un point matériel sont données par le travail des forces Non Conservatives s'appliquant à ce point matériel : $\boxed{d\left(E_M\right)=\delta W_{N.C.\to M}}$

Définition et caractérisation : Un point matériel suit une évolution conservative dans un référentiel R (on dit souvent que le système est conservatif), si son énergie mécanique est une constante. On dit encore que son énergie mécanique est une **intégrale première du mouvement**. Et alors $\boxed{d\left(E_M\right)=0}$

!!!!!!!Remarque très importante : pour qu'un système soit conservatif, **il suffit que** le travail des forces non conservatives sur le point matériel soit nul !!!!!!!

3.2. Etude énergétique du pendule simple.

a. Mise en place de l'étude.

b. Obtention de l'équation du mouvement.

c. Exploitation de l'énergie potentielle, état du système et positions d'équilibre.

d. Linéarisation du mouvement autour d'une position d'équilibre.

3.3. Résumé des méthodes.

a. Obtention de l'équation du mouvement.

Pour un système conservatif à un degré de liberté, on peut obtenir l'équation du mouvement en exploitant la conservation de l'énergie mécanique au cours du temps.

- On exprime l'énergie mécanique du système.
- On traduit le caractère conservatif par la propriété $\frac{dE_M}{dt}=0$
- On en déduit l'équation du mouvement du point matériel.

b. Etudes des positions d'équilibre.

En étudiant l'énergie potentielle, on peut déterminer les positions d'équilibre du point matériel étudié ainsi que leur nature stable ou instable.

Soit un système conservatif pour lequel l'énergie potentielle E_P du point matériel étudié dépend du seul paramètre x.

- Les positions d'équilibre x_e sont les extrema de l'énergie potentielle : $\frac{dE_P}{dx}\left(x_e\right)=0$
- Les positions d'équilibre stables sont des minima de l'énergie potentielle : $\frac{d^2E_P}{dx^2}\left(x_e\right)>0$

c. Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

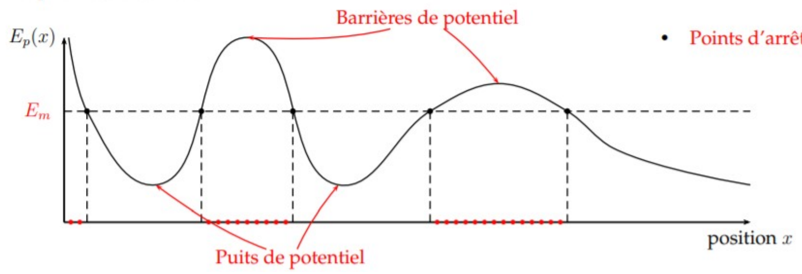
Autour d'une position d'équilibre stable, on peut étudier les oscillations de petite amplitude du point matériel en linéarisant l'équation du mouvement autour de cette position d'équilibre stable.

- L'équation du mouvement s'écrit sous la forme : $\ddot{x}+f\left(x\right)=0$
- On identifie x_O comme une position d'équilibre. On pose $x=x_O+\delta x$ avec δx petit.
- On identifie alors f(x) avec l'équation de la droite tangente en x_O : $f\left(x\right)=f\left(x_O\right)+\frac{df}{dx}\left(x_O\right)\delta x$.
- x_O est une position d'équilibre donc $f\left(x_O\right)=0$ et l'équation devient $\delta\ddot{x}+\frac{df}{dx}\left(x_O\right)\delta x=0$

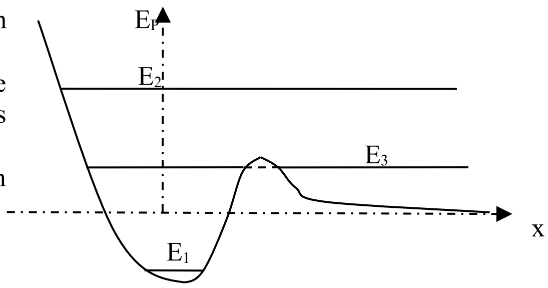
<u>Remarque</u> : On constate que quel que soit le problème conservatif traité, si on met en évidence une position d'équilibre, les petits mouvements autour de cette position d'équilibre vérifieront toujours l'équation du mouvement de l'O.H. Ce dernier apparaît donc comme le cas limite des oscillations de n'importe quel système dès lors qu'on s'intéresse à de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable.

d. **Nature des trajectoires, état du système.**

Lorsqu'on trace la courbe de l'énergie potentielle en fonction du seul paramètre spatial dont elle dépend pour un système conservatif, on peut déduire de son allure la nature des trajectoires possibles pour un point matériel en fonction de son énergie mécanique.



- Pour un point matériel d'énergie mécanique E_m, on désigne alors par le vocabulaire suivant les différentes zones du champ énergétique :
  - On désigne par le terme de puits de potentiel les zones où l'énergie potentielle est inférieure à l'énergie mécanique du système. Un point d'énergie E_m est alors susceptible d'explorer ce puits de potentiel sur une extension limitée par les points d'arrêt en lesquels son énergie cinétique est nécessairement nulle.
  - On désigne par le terme de barrière de potentiel les zones où l'énergie potentielle est supérieure à l'énergie mécanique du point matériel. Ces zones ne peuvent pas être explorées par le point matériel.
- L'énergie mécanique E_1 correspond à un point matériel dont le domaine d'évolution est borné, on parlera dans ce cas d'un état lié.
- E_2 correspond à un point matériel dont le domaine d'évolution n'est pas borné, on parlera dans ce cas d'un état de diffusion.
- E_3 peut correspondre à un état lié ou de diffusion selon les conditions initiales.



<u>Capacités exigibles</u>

- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force
- Définir et calculer la puissance et le travail d'une force
- Distinguer force conservative et force non-conservative
- Savoir établir et exploiter les expressions des énergies potentielles de pesanteur, élastique et Newtonnienne.
- Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique et utiliser les conditions initiales pour la déterminer
- Établir l'équation d'un mouvement conservatif à partir de l'énergie.
- Déduire d'une courbe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité.
- Déduire d'une courbe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un système dont on connaît l'énergie mécanique : état lié ou de diffusion, éventuel mouvement périodique.
- Exploiter qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase.
- Approximer un puits de potentiel quelconque par un puits harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable. Identifier cette situation au modèle de l'oscillateur harmonique