Notions sur les champs et les fonctions de plusieurs variables.

Champ scalaire.

<u>Définition</u> : Un champ scalaire est une fonction de plusieurs variables qui prend ses valeurs dans R ou C.

En physique, on considèrera des champs dépendant de l'espace, dans le cas de l'étude des régimes permanents, ou de l'espace et du temps dans le cas des régimes variables. L'espace de départ sera donc une sous partie de R^3 ou de R^4.

Quelques exemples : Le potentiel électrostatique est un champ scalaire, l'énergie potentielle associée à une force conservative est un champ scalaire. La température ou la pression sont des champs scalaires dans les milieux non homogènes.

<u>Illustrations :</u>

Carte météo donnant l'évolution de la pression sur la région Europe :

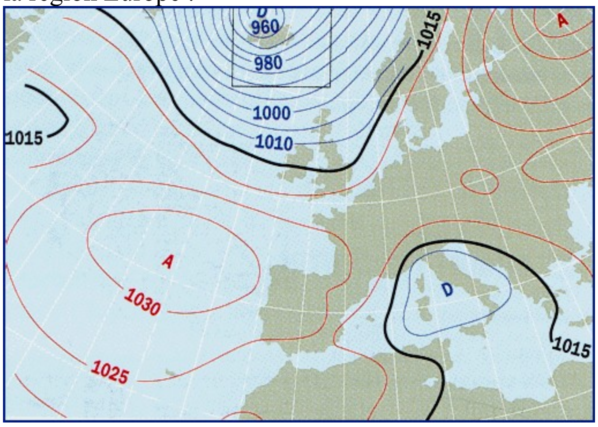
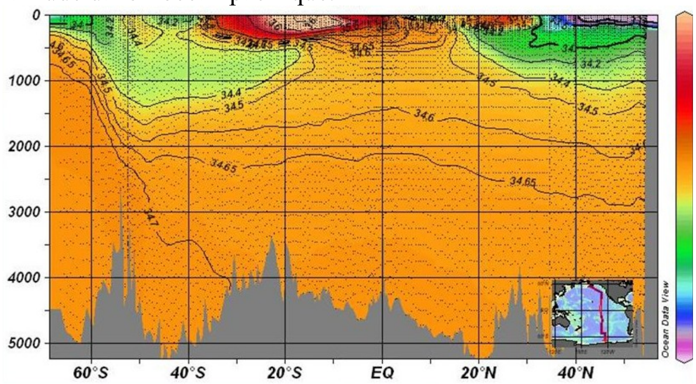


Diagramme donnant l'évolution de la salinité de l'océan en fonction de la profondeur et de la latitude dans l'océan pacifique.



Champ vectoriel.

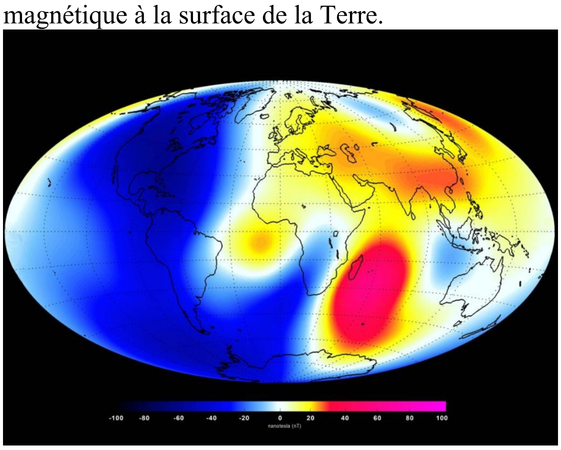
<u>Définition</u> : Un champ vectoriel est une fonction de plusieurs variables qui prend ses valeurs dans un espace de dimension supérieur à 1.

En physique, la plupart des champs considérés prennent leurs valeurs dans R^3 ou dans C^3.

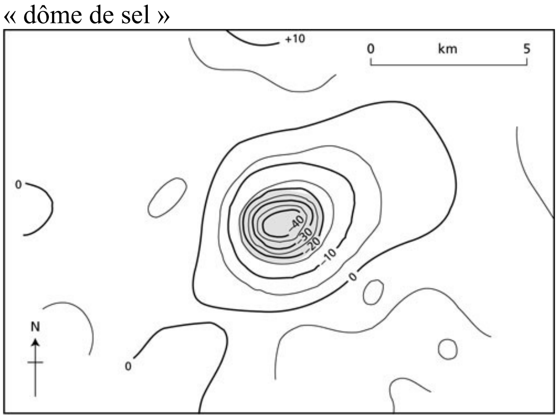
Quelques exemples : Le champ électrique est un champ vectoriel, tout comme le champ magnétique. Le champ de gravité est un champ vectoriel.

<u>Illustrations :</u>

Carte donnant l'évolution de la norme du champ magnétique à la surface de la Terre.



Carte donnant l'évolution de la composante verticale du champ de gravité au-dessus d'un « dôme de sel »



Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles.

On considère une fonction de plusieurs variables, on prendra pour illustrer notre propos, un champ scalaire g(M). On considère alors l'ensemble des variables dont dépend cette fonction. Pour l'illustration, on considèrera une base de projection cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le champ scalaire sera alors vu comme une fonction g(x,y,z) où x, y, z sont les coordonnées du point M dans la base de projection.

Définition : La dérivée partielle de la fonction de plusieurs variables vis-à-vis d'une des variables, est la dérivée de la fonction en fonction de cette variable, en considérant les autres variables constantes.

Notation : Reprenons notre illustration, la notation exacte utilisée pour représenter la dérivée partielle de g par rapport à x est : $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z}$. On utilise le symbole ∂ pour bien la distinguer d'une dérivée « classique ». On indique en indice (en théorie), les variables considérées comme constantes lors de son évaluation.

Forme différentielle.

Pseudo définition : Une forme différentielle construite à partir d'un ensemble de variables (x,y,z) est un objet de la forme suivante : $\delta W = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$

Propriété : Une forme différentielle est dites exacte si elle exprime la différentielle d'une fonction g des variables (x,y,z). Elle prend alors la forme : $dg(M) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x,y} dz$

Propriété : Une forme différentielle est exacte si elle vérifie le critère de Schwartz.

- Il y a des conditions à respecter sur l'espace de définition de la forme différentielle, il doit être étoilé.
- Les dérivées croisées doivent être égales.

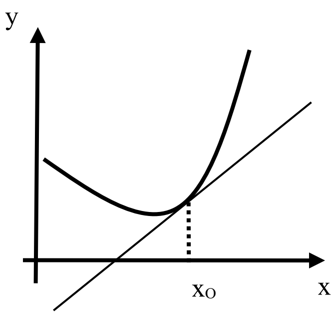
Pour$\delta W = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$, cela se traduit par :

$$\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)_{x,z} ; \left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial z}\right)_{x,} ; \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)_{x,y}$$

Variation d'une grandeur physique en fonction de plusieurs variables.

Considérons tout d'abord une fonction scalaire d'une variable : f(x) et sa représentation graphique y=f(x).

Les propriétés locales de la courbe représentative sont déterminées par la fonction dérivée : au voisinage d'un point M(x_O) non singulier de cette courbe, on peut en effet, en première approximation, remplacer la courbe par la droite tangente en M(x_O), d'équation :$y_{\tan} = f(x_o) + \frac{df}{dx}(x_o)(x - x_o)$.



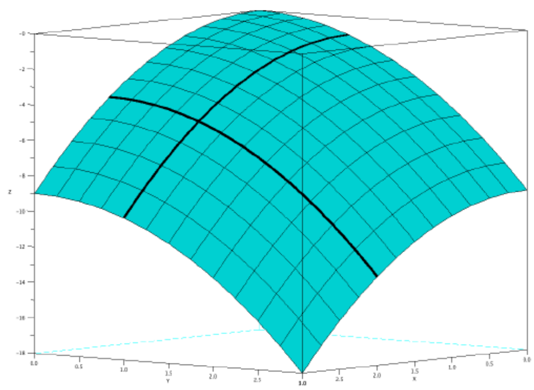
En sciences physiques, on applique cette relation pour étudier les variations d'une grandeur physique autour d'un point en faisant l'approximation au premier ordre : $df = f(x_o + dx) - f(x_o) = \frac{df}{dx}(x_o)dx$

On considère maintenant une fonction scalaire de deux variables : g(x,y) et sa représentation graphique z=f(x,y) qui est donc une surface dans un espace à trois dimensions. Autour d'un point M(x_O,y_O), les propriétés locales de la courbe représentative sont déterminée par les fonctions dérivées partielles.

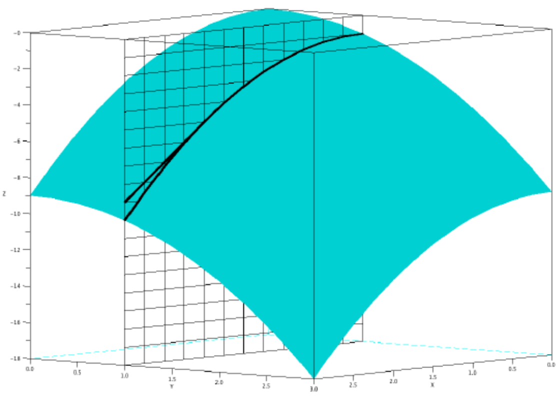
Si on maintient y_O constant, on se ramène à l'étude d'une courbe usuelle représentant une fonction d'une seule variable x et on peut obtenir l'équation de la droite tangente $z_{\tan} = f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o)$

Si on maintient x_O constant, on se ramène à l'étude d'une courbe représentant une fonction de la variable y et on obtient l'équation de la droite tangente $z_{\tan} = f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o)$

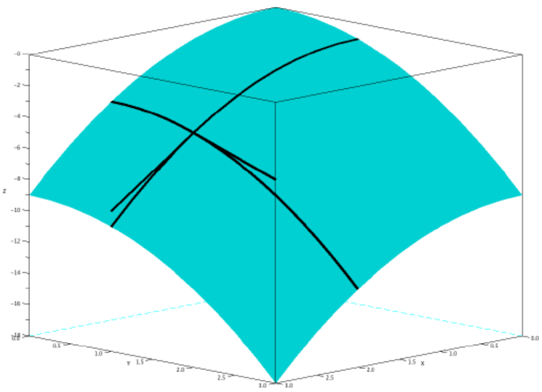
Si on envisage alors le cas d'un déplacement quelconque de M(x_O,y_O) à M'(x,y), on somme les contributions des deux variations :$z_{\tan} = f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o)$



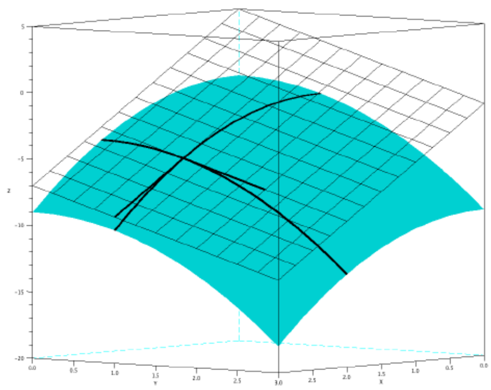
Représentation d'une fonction z=f(x,y)



Construction d'une des droites tangentes (y_O constant)



Représentation des deux vecteurs tangents.



Construction du plan tangent.

En sciences physiques, on applique cette relation pour étudier les variations d'une grandeur physique autour d'un point particulier en faisant l'approximation au premier ordre :

$$df=f(M')-f(M)=\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)dx_i$$

Opérateur vectoriel : le gradient.

<u>Définition</u> : Soit un champ scalaire g(M), de R^3 dans R. La variation élémentaire $dg(M)=g(\overrightarrow{OM}+d\overrightarrow{OM})-g(\overrightarrow{OM})$, dénommée mathématiquement différentielle de la fonction g, s'exprime en fonction de l'opérateur gradient par : $\boxed{dg(M)=\overrightarrow{grad}(g(M))d\overrightarrow{OM}}$

<u>Propriétés</u> :

Le vecteur $\overrightarrow{grad}(g(M))$a les propriétés suivantes :

- Il est orthogonal aux surfaces g=cste (dites surface iso-g).
- Il indique la direction et le sens dans lequel la croissance de g est la plus grande à partir d'un point M donné

Exemple 1 (formel) : une fourmi frileuse se trouve en un point M. Elle cherche à rejoindre le plus rapidement possible le point le plus chaud de l'espace. La bonne tactique pour cette fourmi est de suivre la direction et le sens donné par le vecteur $\overrightarrow{grad}(T)$.

Exemple 2 (réel !) : une bactérie est toujours à la recherche de nourriture, en l'occurrence de sucre. Lors de son mouvement, elle évalue la concentration en sucre dans son environnement et son mouvement moyen suit la direction du vecteur gradient de concentration en sucre.

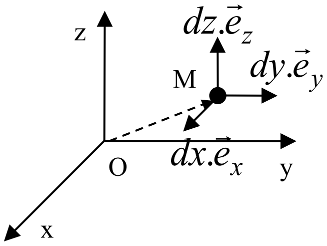
- Sa norme donne la valeur de la variation spatiale du champ scalaire g dans la direction de plus grande variation.

Expression de l'opérateur gradient.

ATTENTION : L'opérateur gradient est défini de manière intrinsèque par la relation donnée en première partie de ce polycopié. Les expressions que nous allons établir ici ne sont que des traductions de cette définition dans les différentes bases de projection.

<u>Coordonnées cartésiennes</u> : La représentation utilisée est : $M \Leftrightarrow (x, y, z)$

$$dg(M) = \overrightarrow{grad}(g(M))\, d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial g}{\partial x}(M)\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}(M)\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}(M)\,dz \quad .$$



Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit

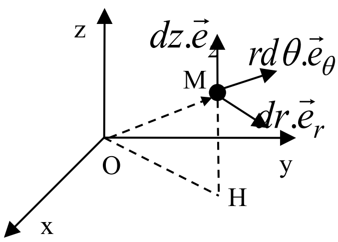
$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$

On en déduit l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(g(M)) = \frac{\partial g}{\partial x}(M)\vec{e}_x + \frac{\partial g}{\partial y}(M)\vec{e}_y + \frac{\partial g}{\partial z}(M)\vec{e}_z}$$

<u>Coordonnées cylindriques</u> : La représentation utilisée est $M \Leftrightarrow (r, \theta, z)$

$$dg(M) = \overrightarrow{grad}(g(M))\, d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial g}{\partial r}(M)\,dr + \frac{\partial g}{\partial \theta}(M)\,d\theta + \frac{\partial g}{\partial z}(M)\,dz$$



Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit

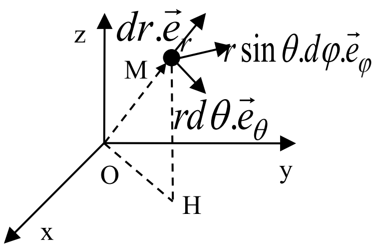
$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$

On en déduit l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(g(M)) = \frac{\partial g}{\partial r}(M)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(M)\vec{e}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}(M)\vec{e}_z}$$

Opérateurs en coordonnées sphériques : La représentation utilisée est $M \Leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$

$$dg(M) = \overrightarrow{grad}(g(M))\, d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial g}{\partial r}(M)\,dr + \frac{\partial g}{\partial \theta}(M)\,d\theta + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(M)\,d\varphi$$



$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

On en déduit l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(g(M)) = \frac{\partial g}{\partial r}(M)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(M)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi}(M)\vec{e}_\varphi}$$