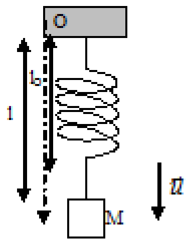
Oscillateur harmonique à un degré de liberté.

1. Systèmes étudiés.

1.1. Un exemple d'oscillateur mécanique : le sismographe.



On considère un point matériel de masse m relié à l'aide d'une ressort à un point fixe du bâti d'un sismographe. On suppose qu'il existe une force de frottement visqueux s'appliquant sur le point matériel.

On suppose que le mouvement du bâti $z_O(t)$ est connu.

Liste des forces s'appliquant sur la masse :

La force de rappel élastique : $\vec{F}_{el} = -k(l - l_O)\vec{u}$

La force de gravité : $\vec{P} = m\vec{g}$

La force de frottement linéaire : $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}_{M/R}$

On choisit une base de projection cartésienne telle que $\vec{e}_z$ soit vertical vers le haut et pour origine spatiale la position moyenne du point O.

Loi de la quantité de mouvement à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $\left(\dfrac{d\vec{p}_{M/R}}{dt}\right)_R = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f$

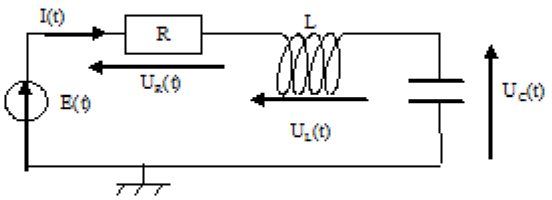
On projette alors sur la direction verticale : $m.\ddot{z}(t) = -mg + k(z_O(t) - z(t) - l_O) - \lambda \dot{z}(t)$

On commence par étudier la position d'équilibre pour laquelle la somme des forces sur la masse est nulle en absence de mouvement du bâti $z_O(t) = 0$. $z_{eq} = -\dfrac{mg}{k} - l_O$. On introduit alors la nouvelle variable Z=z-z$_{eq}$.

L'équation du mouvement vérifiée par Z(t) est alors : $m.\ddot{Z} + \lambda \dot{Z} + kZ = k.z_O(t)$

On peut mettre cette équation sous la forme canonique : $\ddot{Z} + \dfrac{\omega_O}{Q}\dot{Z} + \omega_O^2 Z = \omega_O^2 z_O(t)$ avec $\omega_O = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $Q = \dfrac{1}{\lambda}\sqrt{km}$

1.2. Rappel de l'exemple d'oscillateur électronique : le RLC.



On établit alors l'équation différentielle vérifiée par la tension U$_C$(t).

On écrit la loi des mailles pour ce circuit : $E(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t)$

On écrit alors les lois de comportement pour le résistor et la bobine et le condensateur :

$U_R(t) = RI(t)$; $U_L(t) = L\dfrac{dI}{dt}(t)$; $I(t) = C\dfrac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient alors l'équation différentielle $\dfrac{d^2U_C}{dt^2}(t) + \dfrac{\omega_O}{Q}\dfrac{dU_C}{dt}(t) + \omega_O^2 U_C(t) = \omega_O^2 E(t)$ où $\omega_O = (LC)^{-1/2}$; $Q = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{L}{C}\right)^{1/2}$.

2. Etude de l'oscillateur harmonique en régime libre.

En régime libre, dans le cas de l'oscillateur harmonique, il n'y a pas de frottement et pas de terme de forçage.

2.1. Résolution de l'équation.

a. Solution générale.

On cherche donc les solutions de l'équation différentielle $\ddot{S}(t) + \omega_O^2.S(t) = 0$.

On peut les déterminer par les méthodes usuelles de résolution des équations du second degré.

Elles sont de la forme : $S(t) = A\cos(\omega_O.t) + B\sin(\omega_O.t)$ équivalente à $S(t) = S_O\cos(\omega_O.t + \varphi)$

b. Solution au problème étudié.

Pour déterminer la solution du problème spécifiquement étudiée, il faut alors avoir accès à des conditions initiales qui peuvent se mettre sous la forme : $S(t=0) = S(0)$; $\dot{S}(t=0) = \dot{S}(0)$

Pour la première forme on obtient alors : $S(0) = A$; $\dot{S}(0) = \omega_O B$

Pour la seconde forme on obtient alors : $S(0) = S_O(\cos\varphi)$; $\dot{S}(0) = \omega_O S_O(-\sin\varphi)$

La solution au problème spécifique étudié est alors de la forme :

$S(t) = S(0)\cos(\omega_O.t) + \dfrac{\dot{S}(0)}{\omega_O}\sin(\omega_O.t)$ ou $S(t) = \sqrt{S^2(0) + \dfrac{\dot{S}^2(0)}{\omega_O^2}}\cos\left(\omega_O.t - \arctan\left(\dfrac{\dot{S}(0)}{\omega_O S(0)}\right)\right)$ (où on a fait un choix sur φ).

c. <u>Analyse des solutions.</u>

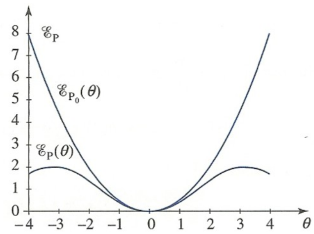
On obtient comme solutions des oscillations sinusoïdales, ou harmoniques, présentant toujours la même pulsation ω_O et donc toujours la même période $T_O=2\pi/\omega_O$ quel que soit l'amplitude du signal étudié. **<u>On dit qu'il y a isochronisme des oscillations.</u>**

2.2. Un modèle pour l'étude autour des positions d'équilibre.

Pourquoi l'oscillateur harmonique se retrouve-t-il dans tous les domaines de la physique ?

On a vu sur l'exemple du pendule simple que l'étude des oscillations de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre stable menait au modèle de l'oscillateur harmonique.

Sur le paysage énergétique du pendule, on approxime l'énergie potentielle par son comportement parabolique autour de la position d'équilibre stable.



2.3. Aspect énergétique.

Pour l'oscillateur harmonique mécanique, par exemple une masse accrochée à un ressort, on introduit deux grandeurs énergétiques :

- L'énergie cinétique : $E_{C;M/R} = \dfrac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/R}\|^2$ une grandeur quadratique de la vitesse du point matériel étudié.
- L'énergie potentielle élastique : $E_{P,el}(M) = \dfrac{1}{2}kx^2$ une grandeur quadratique de l'écart du système par rapport à la position d'équilibre stable.
- Ces deux grandeurs sont de somme constante puisqu'on considère ici un système conservatif.

<u>Grandeurs énergétiques moyennes :</u>

Pour un signal S(t) périodique de période T, on définit la grandeur moyenne par : $\langle S_M \rangle_T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_O}^{t_O+T} S(t)dt$

Pour l'oscillateur harmonique mécanique, pour lequel la solution à l'équation différentielle s'écrit $S(t) = S_O\cos(\omega_O.t + \varphi)$ on obtient : $\langle E_{C;M} \rangle_T = \dfrac{1}{4}kS_O^2$ et $\langle E_{P;M} \rangle_T = \dfrac{1}{4}kS_O^2$

On constate que les énergies cinétique et potentielle moyennes sont égales. On dit qu'il y a équipartition de l'énergie pour les systèmes se comportant en oscillateurs harmoniques.

3. Etude de l'oscillateur harmonique amorti en régime libre.

3.1. Résolution de l'équation.

a. <u>Solution générale.</u>

On cherche donc les solutions de l'équation différentielle $\ddot{S}(t) + \dfrac{\omega_O}{Q}\dot{S}(t) + \omega_O^2.S(t) = 0$.

- On mène la recherche de solution sous la forme $S_H(t) = A\exp(rt)$
- l'équation différentielle se traduit **<u>polynome caractéristique</u>** $r^2 + \dfrac{\omega_O}{Q}r + \omega_O^2$ de discriminant $\Delta = \omega_O^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right)$

On a vu que selon la valeur de Q on obtient trois types de solutions différents :

Si Q<1/2 : $S(t)=A_1\exp(r_1 t)+A_2\exp(r_2 t)$avec :$r_1=-\frac{\omega_O}{2}\left(\frac{1}{Q}+\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}\right)etr_2=-\frac{\omega_O}{2}\left(\frac{1}{Q}-\sqrt{\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)}\right)$

Si Q=1/2 : $S(t)=(A_1+A_2.t)\exp(-\omega_O.t)$

Si Q>1/2 : $S(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)(A_1\cos(\omega.t)+A_2\sin(\omega t))$avec :$\frac{1}{\tau}=\frac{\omega_O}{2Q}et\omega=\omega_O\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

b. <u>Solution au problème étudiée.</u>

Pour déterminer la solution du problème spécifiquement étudiée, il faut alors avoir accès à des conditions initiales qui peuvent se mettre sous la forme : $S(t=0)=S(0)$; $\dot{S}(t=0)=\dot{S}(0)$

Si Q<1/2 : $S(0)=A_1+A_2$ et $\dot{S}(0)=r_1 A_1+r_2 A_2$

On obtient pour solution au problème : $S(t)=\left[\frac{r_2.S(0)-\dot{S}(0)}{r_2-r_1}\exp(r_1.t)+\frac{r_1.S(0)-\dot{S}(0)}{r_1-r_2}\exp(r_2 t)\right]$

Si Q=1/2 : $S(0)=A_1$; $\dot{S}(0)=A_2-\omega_O A_1$

On obtient alors pour solution au problème : $S(t)=\left[S(0)\exp(r.t)+(\dot{S}(0)+\omega_O S(0))t\exp(rt)\right]$

Si Q>1/2 : $S(0)=A_1$; $\dot{S}(0)=\left(\omega A_2-\frac{1}{\tau}A_1\right)$

On obtient alors pour solution au problème : $S(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left[S(0)\cos(\omega.t)+\left(\dot{S}(0)+\frac{S(0)}{\omega\tau}\right)\sin(\omega t)\right]$

4. Etude de l'oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé.

4.1. Réponse en élongation pour le sismographe.

a. <u>Recherche de réponse en régime sinusoïdal forcé.</u>

On cherche donc à déterminer la réponse en régime sinusoïdal forcé pour l'équation différentielle suivante :

$\ddot{Z}+\frac{\omega_O}{Q}\dot{Z}+\omega_O^2 Z=\omega_O^2 a_O\cos(\omega t)$avec $\omega_O=\sqrt{\frac{k}{m}}$; $Q=\frac{1}{\lambda}\sqrt{km}$

On introduit alors les grandeurs complexes associé au problème :

- Pour le mouvement du bâti : $\underline{z}_O(t)=a_O\exp(j\omega t)$ tel que $z_O(t)=\mathrm{Re}(\underline{z}_O(t))$
- Pour le mouvement du point matériel : $\underline{Z}(t)=\underline{Z}_O\exp(j\omega t)$ tel que $Z(t)=\mathrm{Re}(\underline{Z}(t))$
- On établit l'équation algébrique vérifiée par ces signaux complexes en traduisant les dérivées par des multiplications par jω, on obtient l'équation algébrique suivante :

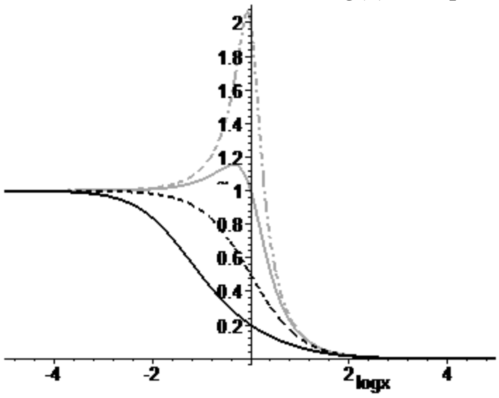
$(-\omega^2)\underline{Z}_O+j\frac{\omega\omega_O}{Q}\underline{Z}_O+\omega_O^2\underline{Z}_O=\omega_O^2 a_O$ ce qui nous donne : $\underline{Z}_O=\frac{\omega_O^2}{(\omega_O^2-\omega^2)+j\frac{\omega\omega_O}{Q}}a_O$

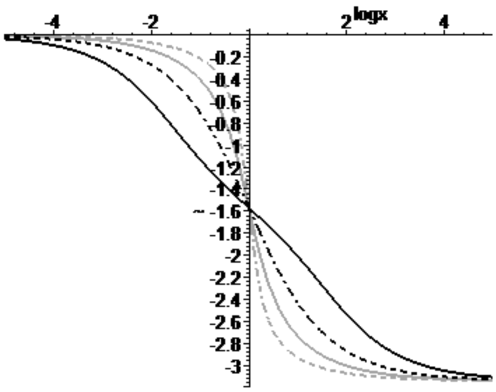
On obtient ainsi en posant $x=\frac{\omega}{\omega_O}$: $\frac{Z_O}{a_O}=\left|\frac{\underline{Z}_O}{a_O}\right|=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

$$\varphi(x)=\arg(\underline{H}(jx))=\begin{cases}\arg(H_O)-\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right) & si\,x<1\\ \arg(H_O)-\pi/2 & si\,x=1\\ \arg(H_O)-\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)-\pi & si\,x<1\end{cases}$$

b. Allure des réponses en amplitude et déphasage.

On représente ci-dessous en fonction de log(x), l'amplitude et la phase de la réponse en élongation :





En noir Q=0,2 ; en pointillé noir Q=0,5 ; en gris Q=1 ; en pointillé gris Q=2.

c. La résonance en élongation du sismographe.

L'étude est similaire à la résonance en tension du circuit RLC.

- Si $Q < 1/\sqrt{2}$, il n'y a pas de solution réelle et l'élongation ne présentera pas de résonnance.
- Si $Q \geq 1/\sqrt{2}$, il y a une solution réelle positive, l'élongation présente une résonnance et le maximum de la réponse en élongation est obtenue pour $x_R = \frac{\omega_R}{\omega_O} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}$.

4.2. Réponse en vitesse pour le sismographe.

a. Détermination de la vitesse.

Pour le sismographe, on détermine la vitesse du point matériel en régime sinusoïdal forcé et en notation complexe par la relation : $\underline{\dot{Z}} = j\omega.\underline{Z}$ On obtient donc pour expression de la vitesse en notation complexe :

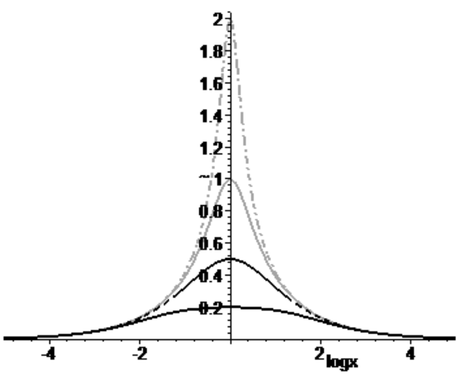
$$\underline{\dot{Z}}_O = \frac{j\omega.\omega_O^2}{\left(\omega_O^2 - \omega^2\right) + j\,\frac{\omega\omega_O}{Q}}\,a_O = \frac{k}{\lambda}.\frac{j\,\frac{x}{Q}}{\left(1 - x^2\right) + j\,\frac{x}{Q}}\,a_O \qquad \text{soit} \quad \underline{\dot{Z}}_O = \frac{Q}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\,\omega_O a_O$$

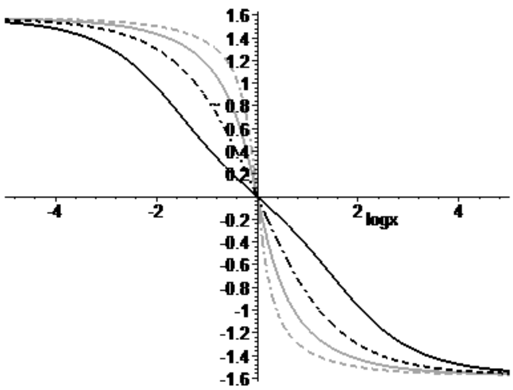
Le gain en vitesse s'exprime donc : $\frac{\dot{Z}_O}{a_O} = \left|\frac{\underline{\dot{Z}}_O}{e_O}\right| = \omega_O \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

Le déphasage pour la vitesse s'exprime : $\Phi = \arg\left(\frac{\underline{\dot{Z}}_O}{e_O}\right) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$

b. Allure des courbes de l'amplitude et du déphasage.

On représente ci-dessous en fonction de log(x), l'amplitude et la phase de la réponse en vitesse :





En noir Q=0,2 ; en pointillé noir Q=0,5 ; en gris Q=1 ; en pointillé gris Q=2.

c. Acuité de la résonance.

L'étude est similaire à celle de la résonance en intensité du circuit RLC.

On obtient ainsi la largeur de la plage de résonance en vitesse du sismographe : $\boxed{\Delta x = \frac{1}{Q}}$

Tableau des grandeurs équivalentes.

Mécanique	Electrocinétique
Position : Z	Tension aux bornes du condensateur U_C
Vitesse : $\dot{Z}$	Intensité : I
Accélération : $\ddot{Z}$	Tension aux bornes de la bobine U_L
Raideur du ressort : k	Capacité du condensateur : 1/C
Facteur de frottement visqueux : λ	Résistance : R
Masse : m	Inductance L
Energie potentielle élastique : E_P	Energie stockée dans le condensateur : E_{Cond}
Energie cinétique : E_C	Energie stockée dans la bobine : E_{bob}
Puissance dissipée par frottement fluide : P_f	Puissance dissipée par effet Joule : P_J
Puissance fournie par l'excitation : P_{exc}	Puissance fournie par le générateur : P_G