

Mouvement d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique uniformes et stationnaires.

1. Force de Lorentz sur une charge ponctuelle.

1.1. Expression de la force.

Définition : La force $\vec{F}_L$ exercée sur un point matériel M portant la charge électrique q et de vitesse $\vec{v}_{M/R}$ dans le référentiel d'étude lorsque règnent un champ électrostatique $\vec{E}_O$ et un champ magnétostatique $\vec{B}_O$ est donnée par la relation suivante appelée force de Lorentz : $F_L = q(\vec{E}_O + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O)$

Remarque : Cette expression de la force électromagnétique sur une particule chargée est vraie dans le cas général. Les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ peuvent être variables dans l'espace et dans le temps, l'expression de la force de Lorentz restera la même : $\vec{F}_L = q(\vec{E}(M, t) + \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}(M, t))$

1.2. La composante électrostatique est conservative.

a. Etude du cas du champ électrostatique uniforme.

On reste dans le cadre du programme, on suppose que le champ électrostatique est constant : $\vec{E}_O = E_O \cdot \vec{e}_x$.
Ce champ étant constant, on met en évidence un potentiel électrostatique $V(x) = -E_O x + Cste$ dont dérive le champ électrostatique $\vec{E} = -\vec{grad}(V(M)) = \frac{-dV}{dx}(M) \vec{e}_x = E_O \vec{e}_x$.

La force électrostatique $\vec{F}_E = q E_O \vec{e}_x$ exercée par ce champ électrostatique uniforme sur une particule de charge électrique q est conservative, on lui associe l'énergie potentielle : $E_{p,elec} = q V(x) = -q E_O x + Cste$.

b. Généralisation pour tous les champs électrostatiques.

L'existence d'un potentiel électrostatique V(M) dont dérive le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est démontrée dans le cas général. Attention, électrostatique signifie que le système est en régime stationnaire, le champ électrostatique ne dépend pas du temps. Les propriétés (équivalentes entre elles) liant le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) sont les suivantes :

$$dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \quad V(A) - V(B) = \int_{A \rightarrow B} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M) \quad \vec{E}(M) = -\vec{grad}(V(M))$$

Ce potentiel électrostatique est celui qu'on manipule en électrocinétique, ce qui permet d'expliquer que dans un circuit composé de fils métalliques, les électrons sont mis en mouvement par la force électrostatique. La différence de potentiel imposée par le générateur entraîne la création d'un champ électrique dans les fils qui met en mouvement les charges.

1.3. Bilan d'énergie mécanique pour une particule chargée.

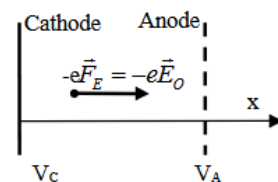
a. Exemple du canon à électron.

On considère un électron de charge $-e$ avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$ de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$, plongé dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_O = E_O \cdot \vec{e}_x$. On mesure à la sortie du système d'électrodes accélératrices, appelé canon à électrons une vitesse $v_O = 2,5 \cdot 10^7 m \cdot s^{-1}$.

On cherche à déterminer la valeur de la tension à appliquer entre les électrodes pour obtenir cette vitesse à la sortie du canon.

On souhaite qu'un électron produit par arrachement thermique au niveau de la cathode soit accéléré par la force électrostatique de Lorentz et atteigne la vitesse $\vec{v}_O = v_O \vec{e}_x$ en sortant du système au niveau de l'anode.

Il faut donc que $E_O < 0$ et que $\frac{dV}{dx} = -E_O > 0$ on en conclut que $V_A > V_C$.



Bilan des forces :

- La force électrostatique $\vec{F}_{L,E}(M) = -e \vec{E}_O$ qui est conservative associée à l'énergie potentielle $E_{p,e}(M) = -e V(M)$
- La force de gravité dont on va montrer par la suite qu'elle est négligeable dans cette étude.

L'énergie mécanique de l'électron s'exprime $E_M = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/R}^2 + q V(M)$

La conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial et l'état final $E_{M,C} = E_{M,A}$

ce qui donne $(0 - eV_C)_{Cathode} = \left(\frac{1}{2} m v_O^2 - eV_A \right)_{Anode}$ On obtient finalement : $U_{AC} = V_A - V_C = \frac{m}{2e} v_O^2 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ V}$

Pour communiquer la vitesse $v_O \approx c/10$ à l'électron, il faut appliquer entre l'anode et la cathode une tension de l'ordre de 1kV. Vérifions maintenant que l'hypothèse d'une force de gravité négligeable est valable :

$$\|\vec{P}\| = m_e g \approx 10^{-3} \cdot 10 \approx 10^{-29} \text{ N} \text{ et } \|\vec{F}_{L,E}\| = e E_O = \frac{e U_{AC}}{d} \approx 10^{-19} \frac{10^3}{10^{-2}} \approx 10^{-15} \text{ N}.$$

$$\text{avec } U_{AC} = V_A - V_C = \int_{A \rightarrow B} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \int_d^0 -E_O dx = E_O d$$

L'hypothèse est largement vérifiée.

b. Généralisation.

Lorsqu'on considère une particule portant une charge q , plongée dans un champ électrostatique associé à un potentiel électrostatique $V(M)$, on peut :

- Négliger la force de gravitation sur cette particule.
- Utiliser le caractère conservatif de la force électrostatique et en déduire la conservation de l'énergie mécanique du système qui s'écrit :

$$E_M = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/R}^2 + q V(M)$$

Entre deux états (position en A, vitesse v_A) (position en B, vitesse v_B) on peut faire le bilan d'énergie suivant : $E_M(A) = E_M(B)$ ce qui amène à $E_C(B) - E_C(A) = q(V_A - V_B)$

Conclusion : le champ électrostatique est susceptible de modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.

1.4. Étude de la composante magnétique.

On considère une particule de charge q , de masse m plongée dans un champ magnétostatique uniforme. Elle est soumise aux forces suivantes :

- La composante magnétique de la force de Lorentz s'exprime : $\vec{F}_L = q(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O)$.
- La force de gravité $\vec{P} = m_e \vec{g}$

On peut d'abord faire la comparaison de ces deux forces :

- $\|\vec{P}\| = m_e g \approx 10^{-3} \cdot 10 \approx 10^{-29} \text{ N}$ et $\|\vec{F}_L\| = e v_O B_O \approx 10^{-19} 10^7 10^{-2} \approx 10^{-14} \text{ N}$
- La force de gravité sera négligeable dans ces études.

On peut également étudier l'influence de la force magnétostatique sur la vitesse de la particule :

- La puissance et le travail de la composante magnétique sont toujours nuls. En effet, on constate que $\vec{F}_L = q(\vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_O)$ toujours perpendiculaire au vecteur vitesse, la puissance $\vec{F}_L \cdot \vec{v}_{M/R}$ de la force de Lorentz magnétique est nulle.

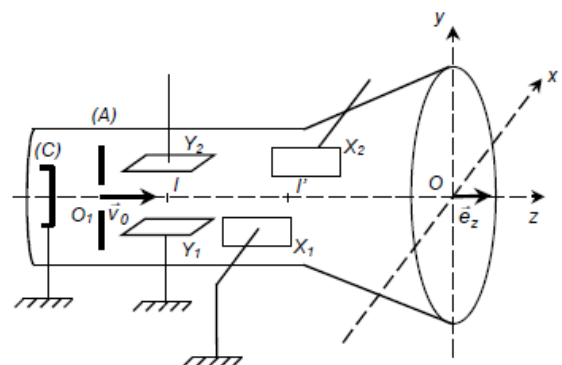
Conclusion : le champ magnétostatique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée.

2. Etude d'un système mettant en œuvre un champ électrostatique uniforme.

2.1. Système étudié : l'oscilloscope analogique.

On considère un oscilloscope analogique dont le schéma est donné sur la figure ci-contre. L'oscilloscope est composé de deux parties :

- Le canon à électrons. Des électrons sont arrachés à la cathode (C) avec une vitesse initiale négligeable puis sont accélérés dans un champ électrostatique uniforme et permanent dirigé selon Oz régnant dans l'espace compris entre cette cathode (C) et l'anode (A). Lorsqu'ils franchissent l'anode (A) Ils ont acquis une vitesse $\vec{v}_O = v_O \vec{e}_z$.
- La partie défectrice qui va dévier le faisceau d'électrons généré par le canon. Entre les armatures Y_1 et Y_2 règne à nouveau un champ électrique uniforme qu'on supposera quasiment constant. Le champ électrique est alors perpendiculaire à la direction initiale des électrons et va dévier le faisceau selon la direction Oy. Le même principe est appliqué pour effectuer la déviation selon Ox entre les armatures X_1 et X_2 .



2.2. Etude du canon.

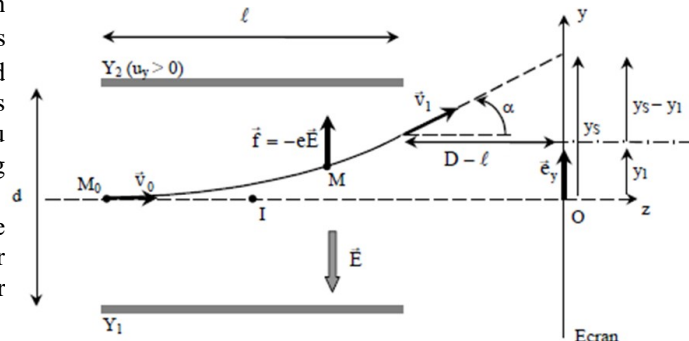
(Déjà mené dans la partie 1.3. du cours)

- On mesure à la sortie du canon une vitesse des électrons $v_o = 2,5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$. On reste dans le cadre non relativiste (mécanique classique, mécanique Newtonienne)
- La tension exercée entre les deux électrodes est notée $U_{AC} = \frac{m}{2e} v_o^2 = 1,8 \cdot 10^3 \text{ V}$

2.3. Etude de la déflexion.

Les plaques déflectrice Y_1, Y_2 , vont générer un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = -E_o \vec{e}_y$ dans l'espace qui les sépare. Une tension $U_{21} = E_o d$ est appliquée entre Y_2 et Y_1 qui sont séparées d'une distance d . On suppose que l'espace où est appliqué ce champ est d'extension l le long de l'axe Oz.

- ➔ On souhaite déterminer la durée mise par l'électron pour traverser l'espace inter armature et l'ordonnée y_s atteinte sur l'écran.



On applique la seconde loi de Newton à l'électron dans l'espace inter armature : $m \vec{a}_{M/R} = -e \vec{E}$

- On projette selon $\vec{e}_z$: $\ddot{z}(t) = 0$; $\dot{z}(t) = v_o$; $z(t) = v_o t$. On a ainsi $z(\tau) = v_o \tau = l$ A.N : $\tau = \frac{l}{v_o} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

Cette durée impacte la fréquence maximale des signaux observables sur l'écran de l'oscilloscope.

- On projette selon $\vec{e}_y$: $\ddot{y}(t) = \frac{eE_o}{m}$; $\dot{y} = \frac{eE_o}{m} t$; $y(t) = \frac{eE_o}{2m} t^2$ Alors à l'instant τ : $y_1 = \frac{eE_o}{2m} \left(\frac{l}{v_o} \right)^2$

Dans l'espace entre la sortie du système déflecteur et l'écran, l'électron ne subit plus de force et son vecteur vitesse est conservé, ce vecteur fait un angle α avec l'horizontale tel que : $\tan \alpha = \frac{v_y(\tau)}{v_o}$ et l'ordonnée atteinte sur

l'écran s'exprime $y_s = y_1 + (y_s - y_1) = \frac{eE_o}{2m} \left(\frac{l}{v_o} \right)^2 + (D-l) \tan \alpha = \frac{eE_o}{2m} \left(\frac{l}{v_o} \right)^2 + (D-l) \frac{eE_o l}{mv_o^2}$

On constate que l'expression de y_s n'est pas simple mais qu'elle est proportionnelle à la norme du champ dans l'espace inter-armature et donc proportionnelle à la tension U_{21} appliquée entre les plaques ce qui remplit bien l'objectif de ce type d'appareil qui est de visualiser la tension enregistrée sur l'écran.

3. Etude du mouvement d'une particule dans un champ magnétostatique uniforme.

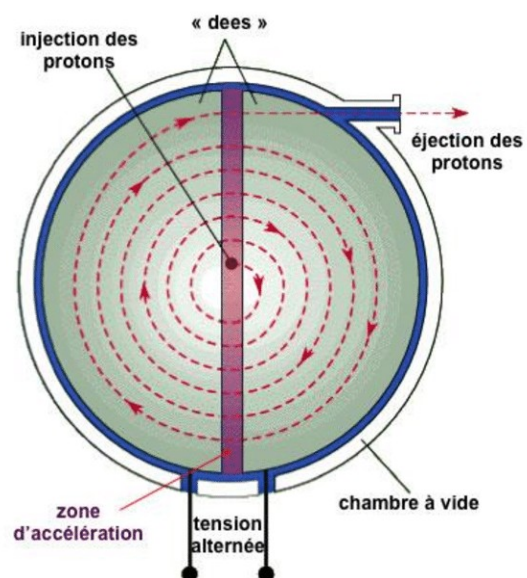
3.1. Système étudié : le cyclotron.

Ce type de système est utilisé pour accélérer des particules dans un espace qui reste raisonnable. Le système est constitué de deux éléments :

- Deux armatures appelées « dees » dans lesquelles règnent un champ magnétostatique uniforme, et qui infléchissent la trajectoire de la particule chargée dans le but de lui faire faire un demi tour.
- Une zone inter armature dans laquelle la particule est accélérée par un champ électrostatique alternativement orienté dans un sens ou dans l'autre de manière synchronisé avec la particule pour que la force électrostatique soit motrice.

➤

Ces systèmes permettent entre autres de produire des sources radioactives d'isotopes de faible durée de vie utilisés par exemple dans les diagnostics médicaux. On peut citer ^{131}I dans les scanners de la thyroïde dont la durée de vie est de 8 jours. On utilise aussi ^{123}I de durée de vie plus courte (13h) et donc plus rapidement éliminé et donc introduit en plus faible dose.



3.2. Etude de la trajectoire de l'ion dans un des « dees ».

On considère un ion de masse m de charge q et de vitesse initiale prise sous la forme $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ plongé dans un champ magnétique perpendiculaire à cette vitesse initiale pris sous la forme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ($B_0 > 0$)

L'ion est soumis à une force de Lorentz, de type magnétique : $\vec{F}_{q,\vec{B}} = q \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_0$

On néglige toute autre action mécanique sur l'ion.

a. Etude naïve dans la base de projection cartésienne.

On applique la seconde loi de Newton dans le référentiel supposé galiléen $m \vec{a}_{M/R} = q \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_0$

On obtient par projection dans la base cartésienne $m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{m} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Avec la vitesse initiale perpendiculaire au champ magnétique, l'étude de l'équation du mouvement selon l'axe (Oz) montre que $\ddot{z}(t) = 0$; $\dot{z}(t) = 0$; $z(t) = 0$; il n'y a pas de mouvement dans cette direction.

L'étude du mouvement dans le plan (xOy) amène au système d'équations couplées
$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \dot{x} \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, il existe plusieurs méthodes, on présente ici la plus naïve.

On intègre la seconde équation en tenant compte des conditions initiales $\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\frac{qB_0}{m} [x(t) - x(0)]$

On introduit l'expression obtenue $\dot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m} x(t)$ dans la première $\ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x = 0$

On définit alors la pulsation cyclotron ω_c telle que $\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$ qui s'exprime $\omega_c = \left| \frac{qB_0}{m} \right|$

On prendra soin de garder la valeur absolue car la charge q peut être positive ou négative, le champ magnétique peut aussi présenter une projection B_0 selon (Oz) positive ou négative.

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique dont les solutions sont : $x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$

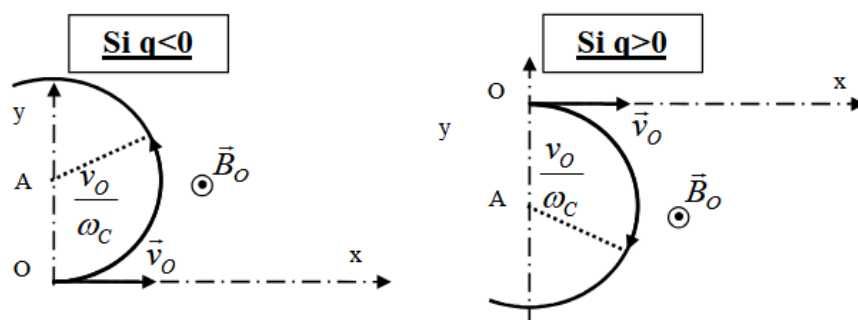
D'après les conditions initiales : $x(0) = 0 = A$; $\dot{x}(0) = v_0 = \omega_c \cdot B$ D'où $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$

On en déduit $\dot{y}(t) = -\frac{qB_0}{m} x = -\varepsilon \omega_c x = -\varepsilon v_0 \sin(\omega_c t)$ où ε est le signe positif ou négatif tel que $\varepsilon \omega_c = \frac{qB_0}{m}$

Puis par intégration : $y(t) - y(0) = -\varepsilon v_0 \left[\frac{-\cos(\omega_c t)}{\omega_c} \right]_0^t = \varepsilon \frac{v_0}{\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1]$

On obtient finalement les équations horaires pour les coordonnées
$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \varepsilon \frac{v_0}{\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1] \end{cases}$$

On montre que $(x-0)^2 + \left(y - \left(-\varepsilon \frac{v_0}{\omega_c}\right)\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$ La trajectoire est un cercle de rayon $\frac{v_0}{\omega_c}$ de centre $A\left(0, -\varepsilon \frac{v_0}{\omega_c}\right)$



b. Etude avertie : on sait que la trajectoire est circulaire.

Si on admet le résultat prouvé précédemment, on peut faire une étude avertie, en utilisant une base de projection adaptée. On emploie alors une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, en fixant l'origine en A et en faisant en sorte que $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ ($B_0 > 0$). On appelle R le rayon de la trajectoire circulaire, on note θ l'angle repérant la position de la particule chargée sur le cercle. La cinématique s'écrit $\vec{AM} = R \vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/R} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.

La seconde loi de Newton donne $m \vec{a}_{M/R} = q \vec{v}_{M/R} \wedge \vec{B}_0$

On obtient par projection dans la base cylindro-polaire : $m \begin{pmatrix} -R \dot{\theta}^2 \\ R \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ R \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -R \dot{\theta}^2 \\ R \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{q B_0}{m} \begin{pmatrix} R \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- La vitesse de rotation est constante $\dot{\theta} = -\frac{q B_0}{m} = -\varepsilon \omega_c$ avec la pulsation cyclotron $\omega_c = \left| \frac{q B_0}{m} \right|$
- On retrouve le rayon en observant la condition initiale $v_0 = R \omega_c$ d'où le rayon $R = \frac{v_0}{\omega_c}$
- Si la charge est négative ($q < 0$), $\dot{\theta} = \omega_c$ on tourne sur le cercle dans le sens trigonométrique, si la charge est positive ($q > 0$), $\dot{\theta} = -\omega_c$, on tourne sur le cercle dans le sens horaire.

Capacités exigibles

- Connaître et exploiter l'expression de la force de Lorentz
- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique et les comparer à ceux de la force gravitationnelle
- Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule
- Mettre en équation le mouvement dans un champ électrostatique uniforme et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.
- Effectuer un bilan d'énergie pour calculer la vitesse atteinte par une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Connaître la phénoménologie du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique
- Déterminer le rayon, la vitesse angulaire et le sens de parcours de la trajectoire d'une charge ponctuelle dans un champ magnétique en admettant qu'elle est circulaire.

Exercice 1 : Limite relativiste.

On considère une particule de charge q et de masse m , produite à une vitesse initiale nulle et accélérée entre deux électrodes A et B dont la différence de potentiel est notée U_{AB} .

1. Déterminer l'énergie cinétique de la particule à la sortie du système d'électrodes.
2. Dans un modèle classique, exprimer la tension U_L pour laquelle la particule atteint une vitesse $c/10$, où c est la vitesse de la lumière.

On considère d'une part, un électron de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et de charge $-e$ et d'autre part un proton de masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg et de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

3. Préciser le signe de la tension appliquée entre les électrodes A et B puis déterminer numériquement U_L . Pour une particule relativiste, on montre que l'énergie cinétique s'exprime en fait $E_C = (\gamma - 1)mc^2$ où le facteur

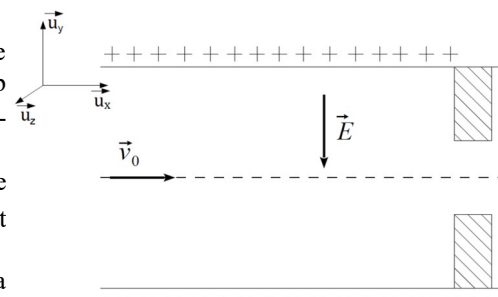
relativiste s'exprime $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

4. Montrer que cette expression de l'énergie cinétique redonne l'expression classique dans la limite des faibles vitesses.
5. Déterminer la vitesse réellement acquise par l'électron lorsqu'il est accéléré par la tension U_L . Faire l'application numérique en pourcentage de la vitesse de la lumière. Commenter le résultat.

Exercice 2 : Filtre de vitesse.

Un faisceau de particules de charge $q < 0$ pénètre avec une vitesse $\vec{v}_0$ entre les armatures d'un condensateur plan qui crée un champ électrostatique uniforme orienté comme indiqué sur la figure ci-contre. La sortie du condensateur est diaphragmée par une fente.

1. Déterminer, en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{v}_0$, le champ magnétique $\vec{B}$ à appliquer pour que les particules du faisceau suivent une trajectoire rectiligne uniforme.
2. Ce champ magnétique étant appliqué, on modifie la norme de la vitesse d'entrée. Analyser qualitativement la trajectoire des particules selon les cas ($v > v_0$) ou ($v < v_0$) Expliquer alors le titre de l'exercice.



Exercice 3 : séparateur d'isotopes.

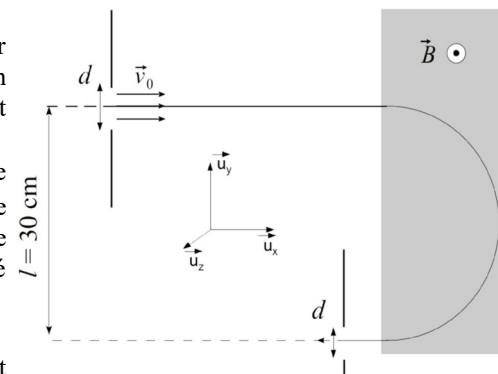
On considère le dispositif ci-contre dont l'objectif est de séparer deux isotopes de l'élément chimique « $Z=1$ » : l'isotope à un nucléon est l'hydrogène noté « H », l'isotope à deux nucléons est le deutérium noté « D ».

Soit un jet homocinétique d'ions H_2^+ et D_2^+ ayant une vitesse $v_0 = 1000 \text{ m.s}^{-1}$, pénétrant dans une zone de champ magnétique uniforme et stationnaire (zone grisée). Ce jet est cylindrique de diamètre $d = 1 \text{ mm}$. On désire obtenir, à la sortie, un jet constitué uniquement d'ions D_2^+ .

Donnée : masse d'un nucléon : $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

On admet que la trajectoire de la particule dans la zone grise est un demi cercle.

1. Montrer que la norme de la vitesse sur la trajectoire circulaire est constante et exprimer le rayon R de cette trajectoire en fonction de m , e et v .
2. En déduire l'intensité B du champ magnétique à appliquer.



Exercice 4 : Chambre à bulles.

Pour étudier les particules produites lors des collisions dans les grands accélérateurs, on observe leurs trajectoires dans une chambre à bulles dans laquelle on impose un champ magnétique constant orienté selon l'axe Oz et de norme B_0 . Cette chambre contient un liquide saturant, qui se vaporise au passage des particules, les bulles produites permettent de visualiser les trajectoires. On modélise l'action du liquide saturant par une force de frottement fluide linéaire de coefficient α_F . On considère une particule de masse m et de charge q initialement placée en O l'origine du repère spatial et dont la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$

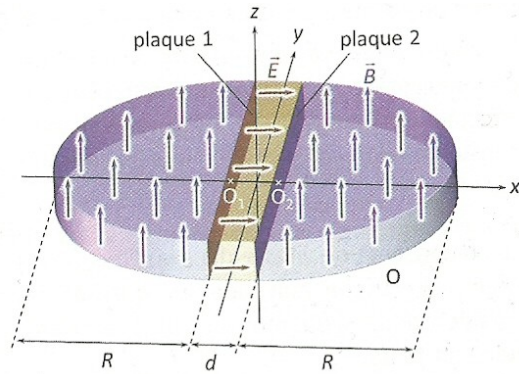
1. Etablir les équations du mouvement de la charge. Faire apparaître une pulsation cyclotron ω_C et un temps d'amortissement τ .
2. Etablir l'expression de $\dot{z}(t)$ et de $z(t)$.

On pose la variable complexe $u = x + jy$.

3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\dot{u}(t)$ et la résoudre. En déduire $u(t)$.
4. Etablir les expressions de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ puis celles de $x(t)$ et $y(t)$.
5. Déterminer la position finale de la particule et représenter « artistiquement » la trajectoire.

Exercice 5 : Accélérateur cyclotron.

Un cyclotron est un dispositif destiné à accélérer des particules chargées en utilisant un champ électrostatique uniforme appliqué entre deux plaques parallèles distantes de d . Pour réduire l'encombrement de l'appareil et la tension à appliquer, un champ magnétostatique uniforme et constant est appliqué dans deux boîtes hémisphériques de rayon R , qu'on appelle des dyes, situés de part et d'autre des plaques. Le vide est fait dans l'ensemble du cyclotron et les plaques comportent un petit espace permettant aux particules de les traverser. On étudie le mouvement dans le repère $(Oxyz)$ dont l'origine O est prise au centre du dispositif. Le champ électrostatique est porté par l'axe (Ox) , le champ magnétostatique est selon (Oz) .



Un proton de masse m et de charge e part sans vitesse initiale du point O_1 situé à l'intersection de la plaque « de gauche » et de l'axe (Ox) . Il est accéléré le long de l'axe Ox par un champ de norme E , généré en appliquant une tension U entre les plaques, et atteint le point O_2 , situé sur la seconde plaque.

On donne : $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $U = 5,00 \text{ kV}$; $d = 1 \text{ cm}$; $R = 1 \text{ m}$; $B = 1 \text{ T}$.

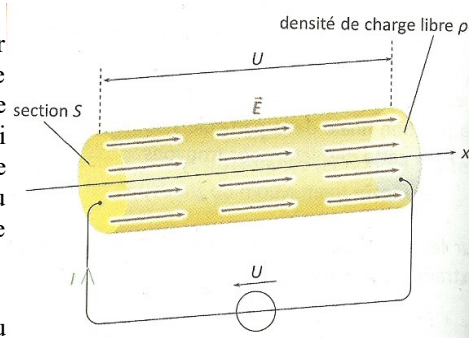
1. Quel sens faut-il donner au champ électrostatique pour accélérer le proton de O_1 en O_2 ? Exprimer l'énergie cinétique E_{c1} du proton après la traversée de l'espace entre les plaques.
2. En faisant l'hypothèse que le proton reste non relativiste, exprimer v_1 la vitesse atteinte par le proton. Déterminer la durée t_1 de la première traversée.
3. En faisant l'hypothèse d'une trajectoire circulaire, étudier le mouvement du proton dans le dye de droite. Exprimer la durée t_1' du demi tour dans le dye pour qu'il rejoigne la plaque 2 ainsi que le rayon R_1 de la trajectoire. Évaluer numériquement t_1' et le comparer à t_1 .

On retourne alors le sens du champ électrostatique en faisant en sorte qu'il accélère toujours le proton lorsqu'il traverse l'espace entre les plaques et on réalise cette opération jusqu'à ce que le proton ait été accéléré par n passages entre les plaques.

4. En étudiant la seconde traversée, exprimer l'énergie cinétique E_{c2} du proton à la fin de la seconde traversée. Montrer alors par récurrence l'expression de E_{cn} après n traversées.
5. Déterminer la durée t_2 de la seconde traversée. Par récurrence, obtenir l'expression de t_n .
6. En étudiant le n ème passage dans un dye, exprimer sa durée t_n' et le rayon R_n du demi cercle parcouru.
7. Montrer que le rayon des dyes limite le nombre de passages entre les plaques. Exprimer le nombre de passages dans l'espace inter-armatures et la vitesse atteinte par le proton en sortie du système.
8. Faire les applications numériques pour la vitesse du proton et pour le nombre de passages dans l'espace inter-armature. Exprimer et évaluer la longueur et la tension à appliquer entre les deux plaques d'un accélérateur linéaire permettant d'atteindre la même vitesse de sortie. Conclure.

Exercice 6 : Modèle de Drüde.

On considère un conducteur cylindrique de section S et de longueur L , dont les extrémités sont soumises à une différence de potentielle U . Un champ électrostatique uniforme, de norme E et dirigé dans le sens de l'axe (Ox) règne dans le volume du conducteur. Celui-ci contient une densité volumique ρ d'électrons libres de masse m et de charge $-e$, assurant la conduction électrique. On modélise l'action du réseau d'ions sur les électrons par une force de frottement fluide linéaire de coefficient d'amortissement α_F .



Masse et charge d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite v_∞ au bout d'un temps caractéristique τ .
2. Exprimer le nombre dn d'électrons traversant la section S du conducteur pendant une durée dt en supposant qu'ils ont atteint leur vitesse limite. En déduire l'expression de l'intensité I du courant électrique traversant cette portion de conducteur.
3. Montrer que U et I sont liés par une relation de proportionnalité. Définir la résistance R de la portion de conducteur et commenter l'influence des paramètres S et L dans l'expression obtenue.

Pour le cuivre, on mesure une résistivité $r = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, on donne la masse volumique $\mu = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et la masse molaire $M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3. En supposant que chaque atome de cuivre libère un électron pour la conduction, déterminer ρ puis évaluer numériquement ρ et τ . En déduire une limite de fréquence au-delà de laquelle le modèle de conduction présenté n'est plus valable.