

Loi du moment cinétique pour le point matériel.

Introduction.

La loi du moment cinétique est une relation dynamique, c'est-à-dire qu'elle relie le mouvement d'un objet aux causes qui lui ont donné naissance.

En mécanique du point, les résultats obtenus grâce au théorème du moment cinétique sont identiques à ceux obtenus à l'aide du PFD. L'introduction de ce théorème remplit deux objectifs :

- appliquer la loi du moment cinétique peut s'avérer plus simple ou apporter une meilleure compréhension du mouvement du point matériel étudié. Par exemple il constitue parfois une intégrale première du mouvement.
- Appliquer la loi du moment cinétique sur un solide en rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel d'étude. Dans le cadre de l'étude d'un solide, la loi du moment cinétique est la seule qui puisse permettre de rendre compte de son mouvement de rotation.

1. Moment cinétique pour un point matériel.

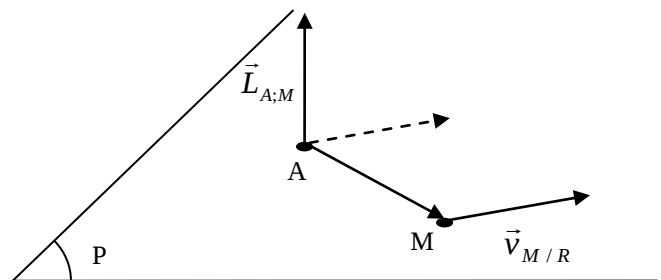
1.1. Moment cinétique d'un point matériel en un point.

a. Définition.

Soit un point matériel M de masse m dans un référentiel R d'origine O, le point matériel M étant animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/R}$.

Soit A un point fixe dans le référentiel R. On appelle moment cinétique en A du point matériel M dans le référentiel R le vecteur :

$$\vec{L}_{A;M} = \overrightarrow{AM} \wedge (m\vec{v}_{M/R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{M/R}$$



b. Propriétés.

Avec les propriétés du produit vectoriel, on obtient directement que :

- Le moment cinétique $\vec{L}_{A;M}$ est perpendiculaire au plan défini par le point A, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}$. $\overrightarrow{AM}$, $\vec{v}_{M/R}$ et $\vec{L}_{A;M}$ forment (dans cet ordre) un trièdre direct, l'orientation du moment cinétique est donc obtenu par la règle des trois doigts de la main droite.
- La norme du moment cinétique s'exprime par : $\|\vec{L}_{A;M}\| = \|\overrightarrow{AM}\| \|m\vec{v}_{M/R}\| \sin(\overrightarrow{AM}; \vec{v}_{M/R})$.

Le moment cinétique dépend du point en lequel on l'évalue :

- Soit B un autre point fixe dans le référentiel R, on peut relier les moments cinétiques en A et en B par la relation : $\vec{L}_{B;M} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}_{M/R} + \vec{L}_{A;M}$. Cette relation est conservée dans l'étude du moment cinétique d'un solide.

1.2. Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté.

a. Définition.

Soit un point matériel M de masse m dans un référentiel R d'origine O. Le point matériel M est animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/R}$. Soit Δ un axe fixe dans le référentiel R dirigé dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$.

On définit le moment cinétique du point matériel M par rapport à l'axe Δ par : $L_{\Delta;M} = \vec{L}_{A;M} \cdot \vec{u}_\Delta$ où A est un point quelconque appartenant à l'axe Δ .

b. Interprétation et propriété.

- Le moment cinétique par rapport à un axe Δ est la composante (ou encore la projection) selon l'axe Δ du moment cinétique calculé pour le point matériel étudié en n'importe quel point de l'axe Δ .

Soient A et B deux points de l'axe Δ : $\vec{L}_{B;M} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}_{M/R} + \vec{L}_{A;M}$

On projette alors sur l'axe Δ : $\vec{L}_{B;M} \cdot \vec{u}_\Delta = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}_{M/R} \cdot \vec{u}_\Delta + \vec{L}_{A;M} \cdot \vec{u}_\Delta$

Puisque $\overrightarrow{BA}$ est porté par l'axe Δ , le moment cinétique par rapport à Δ s'obtient en considérant n'importe quel point de cet axe. On choisira donc quand on a le choix le point le plus pratique pour l'exprimer.

1.3. Moment cinétique d'un système discret de points matériels par rapport à un axe orienté.

Prenons maintenant le cas d'un ensemble de points matériels $\Sigma(t) = \{M_i, m_i, \vec{v}_i\}$. Il apparaît évident qu'on pourra exprimer le moment cinétique associé à l'ensemble du système en faisant la somme des moments cinétiques associés à chaque point ce qui donne :

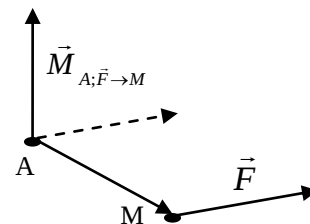
- Pour le moment cinétique du système en un point A : $\vec{L}_{A;\Sigma} = \sum_i \vec{L}_{A;M_i} = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge (m_i \vec{v}_i)$
- Pour le moment cinétique du système par rapport à l'axe orienté Δ : $L_{\Delta;\Sigma} = \sum_i L_{\Delta;M_i} = \sum_i \left[\overrightarrow{AM_i} \wedge (m_i \vec{v}_i) \right] \cdot \vec{u}_\Delta$

2. Moment Dynamique d'une force sur un point matériel.

2.1. Moment dynamique en un point.

a. Définition.

Soit $\vec{F}$ une force s'exerçant sur le point matériel M et A un point fixe dans le référentiel R, on définit le moment exercée par cette force sur M par rapport au point A par la relation : $\vec{M}_{A;\vec{F} \rightarrow M} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$



b. Propriétés.

Encore une fois, les propriétés du moment de la force exercée sur le point matériel en un point sont celles du produit vectoriel.

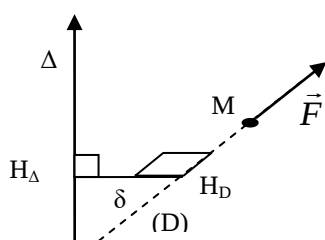
2.2. Moment dynamique par rapport à un axe.

a. Définition.

Soit un point matériel M sur lequel s'exerce une force $\vec{F}$. Soit Δ un axe fixe dans le référentiel R dirigé dans la direction et le sens du vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$. On définit le moment de la force sur le point matériel M par rapport à l'axe Δ par : $M_{\Delta;\vec{F} \rightarrow M} = \vec{M}_{A;\vec{F} \rightarrow M} \cdot \vec{u}_\Delta$ où A est un point quelconque appartenant à l'axe Δ .

b. Interprétation et propriété.

- Le moment de la force par rapport à un axe Δ est la composante selon l'axe Δ du moment de la force calculé en n'importe quel point de l'axe Δ .



Soit $\vec{F}$ une force appartenant au plan perpendiculaire à l'axe Δ , et (D) la droite donnant la direction de la force. $[H_\Delta H_D]$ est le segment perpendiculaire à la fois à l'axe et à la droite, on appelle bras de levier, noté δ la longueur de ce segment.

- Alors la valeur absolue du moment de cette force par rapport à l'axe Δ est exprimé par le produit du bras de levier par la norme de la force $|M_{\Delta;\vec{F} \rightarrow M}| = \delta \|\vec{F}\|$.
- Le signe du moment est positif si la force « fait tourner » M dans le sens trigonométrique, négatif si la force « fait tourner » M dans le sens horaire autour de l'axe Δ .

Si la force $\vec{F}$ n'est pas dans le plan perpendiculaire à l'axe Δ , on peut la décomposer en une composante parallèle à l'axe Δ qui produira alors un moment nul et une composante perpendiculaire à l'axe Δ pour laquelle on reprendra le principe du bras de levier précédent.

3. Loi du moment cinétique.

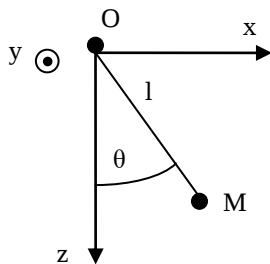
3.1. Loi du moment cinétique en un point fixe.

Enoncé : Soit A un point fixe par rapport à un référentiel galiléen R, la loi du moment cinétique appliqué en A dans ce référentiel galiléen R s'écrit :
$$\left(\frac{d\vec{L}_{A;M}}{dt} \right)_R = \sum \vec{M}_{A;\vec{F} \rightarrow M}$$

3.2. Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe.

Enoncé : Soit Δ un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen R, la loi du moment cinétique par rapport à l'axe Δ dans ce référentiel galiléen R s'écrit :
$$\left(\frac{dL_{\Delta;M}}{dt} \right)_R = \sum M_{\Delta;\vec{F} \rightarrow M}$$

3.3. Application à l'étude du pendule simple.



De manière intuitive, le point O va jouer un rôle important dans l'étude du mouvement du pendule, on va donc étudier le pendule simple à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué en O.

Cinématique : $\vec{OM} = l\vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{L}_{O;M} = \vec{OM} \wedge (m\vec{v}_{M/R})$

On obtient : $\vec{L}_{O;M} = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_y$

Bilan des actions mécaniques :

Moment de la force de pesanteur sur le point M : $\vec{M}_{O;\vec{P} \rightarrow M} = \vec{OM} \wedge \vec{P} = -mgl \sin \theta \vec{e}_y$

Moment de la tension du fil sur le point M : il est nul car la droite support de la tension passe par le point O.

On peut alors appliquer le théorème du moment cinétique au point matériel M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- En O : $ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_y = -mgl \sin \theta \vec{e}_y$.
- Directement par rapport à l'axe Oy : $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$

On obtient ainsi par cette troisième méthode l'équation du mouvement du pendule : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$

3.4. Condition de conservation.

Les lois de conservation sont fondamentales dans l'étude du mouvement d'un point matériel.

Supposons qu'un point matériel M de masse m soit animé d'un mouvement caractérisé par la conservation de

son moment cinétique en un point A ce qui se traduit par la relation :
$$\left(\frac{d\vec{L}_{A;M}}{dt} \right)_R = \vec{0}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique, on en déduit que $\sum \vec{M}_{A;\vec{F} \rightarrow M} = \vec{0}$ ce qui se ré exprime

$\vec{AM} \wedge \left(\sum \vec{F}_{\rightarrow M} \right) = \vec{0}$.

- Soit $\left(\sum \vec{F}_{\rightarrow M} \right) = \vec{0}$ ce qui correspond à un système pseudo isolé. Dans ce cas, la quantité de mouvement du point matériel est conservée et le moment cinétique en tout point est conservé. Dans ce cas il est plus intéressant d'exploiter la conservation de la quantité de mouvement.
- Soit $\vec{AM} = \vec{0}$ ce qui ne correspond pas à la définition d'un mouvement.
- Soit à tout instant la résultante des forces est dirigée selon la droite passant par A et M.

Définition : On appelle force centrale de centre A une force dont la droite support passe à tout instant par le point A. On peut citer comme exemple les forces Newtoniennes, la force élastique pour un ressort attaché en un point fixe A, la tension d'un fil attaché en un point fixe A.

Conclusion : Le moment cinétique d'un point matériel M au point A se conserve au cours du mouvement si ce point matériel est soumis à une force totale centrale de centre A.

Capacités exigibles

- Déterminer le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.
- Maîtriser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire (lien avec le sens de rotation)
- Déterminer le moment d'une force par rapport à un point
- Déterminer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant une projection ou le bras de levier.
- Connaître le théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen
- Identifier les cas de conservation du moment cinétique.

Mouvement dans un champ de force centrale conservative.

1. Etude du mouvement à force centrale.

1.1. Conservation du moment cinétique.

On considère un système assimilé à un point matériel M de masse m sur lequel s'exerce une force centrale de centre O qu'on prendra comme origine du repère spatial pour le référentiel R, supposé galiléen. Le vecteur force appliqué sur le point matériel est donc colinéaire avec le vecteur position du point matériel M.

La loi du moment cinétique appliquée en O dans R pour le point M s'exprime : $\left(\frac{d\vec{L}_{O/M}}{dt} \right)_R = \vec{OM} \wedge \vec{F}(M) = \vec{0}$

On retrouve le résultat obtenu dans le chapitre sur le moment cinétique, à savoir que le moment cinétique en O le centre de la force centrale est une grandeur conservée.

1.2. Conséquence 1 : Planéité du mouvement.

Le moment cinétique est donc une grandeur conservée lors d'un mouvement à force centrale.

On peut le noter : $\vec{L}_{O/M} = mC.\vec{e}_z$.

De part sa définition, le moment cinétique en O doit toujours être perpendiculaire au vecteur position $\vec{OM}$, on en conclut que ce dernier est astreint à se déplacer dans le plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$ contenant le point O.

Première conséquence de la conservation du moment cinétique en O : pour un mouvement à force centrale, la trajectoire du point matériel étudié est située dans le plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique passant par le centre d'attraction O. On dit qu'il y a planéité du mouvement.

On doit donc mener l'étude d'un mouvement dans un plan perpendiculaire au vecteur $\vec{e}_z$ présentant un point particulier O, centre de la force. La base de projection adaptée à ce type d'étude est la base cylindro-polaire, dans laquelle : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\vec{a}_{M/R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

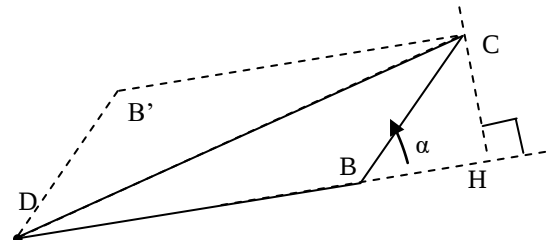
1.3. Conséquence 2 : Loi des aires.

On considère le triangle (DBC), dont on veut exprimer l'aire, on note α l'angle entre les vecteurs $\vec{DB}$ et $\vec{BC}$.

L'aire du triangle DBC est la moitié de l'aire du parallélogramme DBCB' soit le produit de la base DB par la hauteur CH du parallélogramme. On obtient donc que l'aire du triangle s'exprime

$$\frac{1}{2} \|\vec{DB}\| \|\vec{BC}\| \sin \alpha$$

On en conclut que l'aire A du triangle DBC est donnée par : $A = \frac{1}{2} \|\vec{DB} \wedge \vec{BC}\|$



Le vecteur position s'exprime $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ et le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$

L'aire élémentaire balayée par le vecteur position au cours d'un déplacement élémentaire est donc celle du triangle de coté $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ et $d\vec{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ qui s'exprime à partir de la norme du produit vectoriel des

deux vecteurs : $dA = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| :$

D'une part, on a donc : $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ et d'autre part, on a : $\vec{L}_{O/M} = mC.\vec{e}_z = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{M/R} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

On obtient donc le résultat supplémentaire : $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt = \frac{C}{2} dt$.

Seconde conséquence de la conservation du moment cinétique, la loi des aires : Le vecteur position d'un point matériel soumis à une force centrale de centre O balaye des aires égales pendant des durées égales.

Ecriture locale : L'aire élémentaire balayée pendant une durée dt s'exprime : $dA = \frac{C}{2} dt$

Ecriture sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$: L'aire ΔA balayée s'exprime : $\Delta A(t_1, t_2) = \frac{C}{2} (t_2 - t_1)$

C est appelée constante des aires et elle est reliée au moment cinétique en O par : $\vec{L}_{O/M} = mC.\vec{e}_z = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

2. Etude du mouvement à force centrale conservative.

2.1. Caractère conservatif de la force centrale.

a. Dépendance l'énergie potentielle à la seule distance au centre attractif.

Puisque la force centrale étudiée $\vec{F}(M)$ est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle $E_p(M)$ telle que : $\vec{F}(M) = -\text{grad}(E_p(M))$. Deux exemples de ce type de force ont été vue dans le cours sur les méthodes d'étude énergétique des systèmes : la force élastique pour un ressort attaché à un point fixe O et les forces newtoniennes.

On notera que la force et l'énergie potentielle pour une force centrale conservative ne peuvent alors dépendre que de r la distance au centre attractif O.

D'une part $\vec{F}(M) = -\frac{\partial E_p}{\partial r}(M)\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}(M)\vec{e}_\theta$ et d'autre part $\vec{F}(M) = F(M)\vec{e}_r$

On en conclut bien que l'énergie potentielle ne dépend que de r et par conséquent que $\vec{F}(M) = -\frac{dE_p}{dr}(r)\vec{e}_r$ ne dépendra que de r .

b. Conservation de l'énergie mécanique.

Pour finir, on peut établir comme on en a l'habitude, que si le système n'est soumis qu'à la seule force centrale conservative étudiée, il n'y a pas de force non conservative qui travaille et que l'énergie mécanique du système est nécessairement conservée.

2.2. Energie potentielle effective.

a. Etablissement de l'énergie potentielle effective.

L'énergie mécanique est donc conservée dans la situation étudiée.

L'énergie cinétique du point matériel s'exprime : $E_C = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/R}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

L'énergie mécanique s'écrit par conséquent sous la forme: $E_M = E_C + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$

Dans l'expression de l'énergie cinétique, on peut alors exploiter le caractère central de la force considérée.

On a en effet : $C = r^2\dot{\theta}$, en remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique, on traduit la conservation de

l'énergie mécanique par : $E_M = E_C + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

On peut donc ramener l'étude énergétique à un problème à un degré de liberté en introduisant une énergie

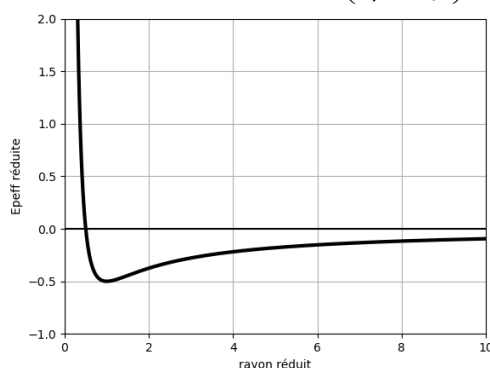
potentielle effective : $E_{p,eff}(r) = \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$

b. Exemple de l'interaction gravitationnelle.

L'énergie potentielle effective s'exprime : $E_{p,eff}(r) = \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r}$ avec $k < 0$ (centre de force toujours attractif)

On pose $r_0 = \frac{mC^2}{-k}$, l'énergie potentielle effective s'exprime alors : $E_{p,eff}(\rho) = \frac{(-k)^2}{mC^2}\left(\frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho}\right)$ avec $\rho = \frac{r}{r_0}$

On peut alors tracer la fonction $\left(\frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho}\right)$, la courbe est donnée sur le graphique suivant :



- Si l'énergie mécanique est négative, on aura un état lié présentant une trajectoire fermée autour de l'origine du repère.
- On peut noter le cas particulier d'une énergie mécanique correspondant au minimum de l'énergie potentielle effective en $\rho=1$ qui donnera une trajectoire à rayon constant, c'est-à-dire circulaire.
- Si l'énergie mécanique est positive, on aura un état de diffusion.

3. Mouvement dans un champ de force central newtonien.

3.1. *Enoncé des lois de Kepler.*

Les lois de Kepler ont été énoncées à partir de l'observation du mouvement des planètes autour du soleil au début du XVII^e siècle. Elles sont donc d'origine expérimentale.

Ces lois furent un des points d'appui d'Isaac Newton pour élaborer par la suite sa théorie de la gravitation universelle.

Première loi de Kepler : Chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le (centre du) soleil est un des foyers.

Seconde loi de Kepler : L'aire balayée par le rayon soleil planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire. (C'est donc la loi des aires).

Troisième loi de Kepler : La période T de révolution sidérale d'une planète et le demi grand axe a de la trajectoire elliptique sont liées par la relation $\frac{T^2}{a^3} = K$ où K est une constante commune à toutes les planètes.

3.2. *Etude des trajectoires circulaires.*

Le point matériel est soumis à la force newtonienne attractive qu'on note : $\vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$. Avec $k < 0$

a. Période de rotation.

La trajectoire est circulaire ; à tout instant : $\vec{OM} = r_o \vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = r_o \dot{\theta} \vec{e}_\theta$; $\vec{a}_{M/R} = -r_o \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_o \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

L'application de la loi de la quantité de mouvement donne : $\left(\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} \right) = \vec{F}(r)$

En projection selon $\vec{e}_\theta$, on obtient : $r_o \ddot{\theta} = 0$, on en conclut que la vitesse de rotation est constante.

En projection selon $\vec{e}_r$, on obtient : $-mr_o \dot{\theta}^2 = \frac{k}{r_o^2}$ et on obtient que $\dot{\theta}^2 = \frac{-k}{mr_o^3}$

Conclusions :

- Le mouvement de rotation sur une trajectoire circulaire pour une planète autour du soleil ou pour un satellite autour de la terre est uniforme, c'est-à-dire que la vitesse de rotation est uniforme.

- La période de révolution du satellite autour de la terre est alors : $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{mr_o^3}{-k}}$

b. Troisième loi de Képler.

On considère une planète en rotation autour du soleil, c'est la force d'attraction gravitationnelle universelle qui s'exerce alors : $k = -mM_s G$

On en déduit que pour une planète autour du soleil : $T = 2\pi \sqrt{\frac{r_o^3}{M_s G}}$

On obtient donc la troisième loi de Képler pour une planète autour du soleil : $\frac{T^2}{r_o^3} = \frac{4\pi^2}{M_s G}$

On considère maintenant un satellite en rotation autour de la terre, on sait alors que : $k = -mM_T G$

On en déduit que pour un satellite autour de la terre : $T = 2\pi \sqrt{\frac{r_o^3}{M_T G}}$

On obtient donc la troisième loi de Képler pour un satellite autour de la terre : $\frac{T^2}{r_o^3} = \frac{4\pi^2}{M_T G}$

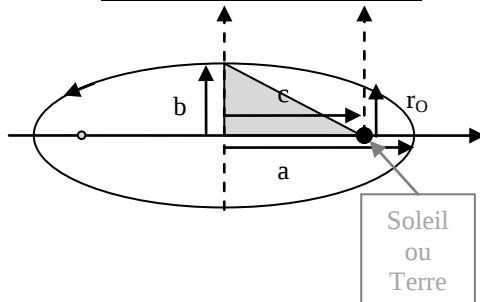
c. Energie mécanique :

On reprend les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle et on les traduit pour les trajectoires circulaires de rayon r_o : $E_C = \frac{1}{2} m (r_o^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r_o^2} = -\frac{1}{2} \frac{k}{r_o}$ et $E_P = \frac{k}{r_o}$

On établit alors les relations suivantes et l'expression de l'énergie mécanique : $E_M = -E_C = \frac{E_P}{2} = \frac{k}{2r_O}$

3.3. Etude des trajectoires elliptiques.

a. Expression de la trajectoire.



L'équation de la trajectoire elliptique est donnée par

$$r(\theta) = \frac{r_O}{1 + e \cos(\theta)}$$

- On nomme r_O le paramètre de l'ellipse.
- On nomme e son excentricité. Pour une ellipse, l'excentricité est dans l'intervalle $[0, 1[$.
- On appelle a le demi grand axe de l'ellipse et b le demi petit axe.

Le périégée (ou périhélie) est défini dans un mouvement autour de la terre (autour du soleil) comme la distance minimale entre le centre de la terre (du soleil) et le point matériel : $r_{\min} = \frac{r_O}{1+e} = a - c$

L'apogée (aphélie) est défini dans un mouvement autour de la terre (autour du soleil) comme la distance maximale entre le centre de la terre (du soleil) et le point matériel : $r_{\max} = \frac{r_O}{1-e} = a + c$

On obtient alors facilement l'expression du paramètre de la conique en fonction de a et e : $r_O = a(1 - e^2)$

Et de la distance $c = a.e$ et on ré-exprime : $r_{\min} = a(1 - e)$ et $r_{\max} = a(1 + e)$

Pour obtenir la relation entre le demi grand axe et le demi petit axe, on considère le triangle gris de la figure dans lequel les côtés ont pour longueur a (hypoténuse), c (le long du grand axe), b le long du petit axe. $b = a\sqrt{1 - e^2}$

b. Relation entre énergie et demi grand axe.

Version du programme : On a montré pour les trajectoires circulaires que l'énergie mécanique du point matériel s'exprime en fonction du rayon r_O : $E_M = \frac{k}{2r_O}$

On admet que pour une trajectoire elliptique, la relation est similaire et fait intervenir le demi grand axe de l'ellipse en lieu et place du rayon : $E_M = \frac{k}{2a}$

Version hors programme :

Aux points de périégée et d'apogée, l'énergie mécanique s'exprime : $E_M = \frac{1}{2} m(r_i^2 \dot{\theta}_i^2) + \frac{k}{r_i} = \frac{1}{2} m \left(\frac{C^2}{r_i^2} \right) + \frac{k}{r_i}$

$r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont donc les racines du polynôme : $x^2 - \frac{k}{E_M} x - \left(\frac{mC^2}{2E_M} \right) = 0$

On en déduit donc que : $r_{\max} + r_{\min} = 2a = \frac{k}{E_M}$, On obtient bien $E_M = \frac{k}{2a}$

c. Troisième loi de Kepler.

Version du programme : On a montré pour les trajectoires circulaires de rayon r_O que la troisième loi de Képler était vérifiée : $\frac{T^2}{r_O^3} = \frac{4\pi^2}{M_T G}$

On admet que pour une trajectoire elliptique, la relation est similaire et fait intervenir le demi grand axe de l'ellipse en lieu et place du rayon : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{M_T G}$

Version hors programme :

Le produit des racines du polynôme précédent donne : $r_{\max} \cdot r_{\min} = a^2(1 - e^2) = -\frac{mC^2}{2E_M} = -\frac{mC^2 a}{k}$

D'où $mC^2 = -ka(1 - e^2)$.

On reprend la loi des aires pour écrire : $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-ka(1 - e^2)}{m}}$

En intégrant sur une période de révolution du point matériel, on obtient : $A_{ellipse} = \pi \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-ka(1-e^2)}{m}} T$

On écrit alors la relation précédemment établie : $b = a\sqrt{1-e^2}$, on obtient : $2\pi \cdot a^2 = \sqrt{\frac{-ka}{m}} T$

On passe l'expression au carré et on exprime $k = -mM_S G$ (pour une planète autour du soleil) pour obtenir la troisième loi de Kepler pour les trajectoires elliptiques : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{M_S G}$

3.4. Vitesses cosmiques.

a. Vitesse d'un satellite sur sa trajectoire circulaire

On reprend l'expression $\dot{\theta}^2 = \frac{-k}{mr_o^3}$ ce qui donne $v^2 = \frac{-k}{mr_o} = \frac{M_T G}{r_o}$ pour la vitesse du satellite sur sa trajectoire circulaire.

A la surface de la Terre, on peut noter que la force de gravitation s'exprime $\vec{P} = -mg\vec{e}_r = -\frac{mM_T G}{R_T^2} \vec{e}_r$

On en déduit que $M_T G = gR_T^2$ et qu'on peut ré exprimer $v^2 = \frac{gR_T^2}{r_o}$ et obtenir $v = R_T \sqrt{\frac{g}{r_o}}$

Définition et expression de la première vitesse cosmique : La première vitesse cosmique v_1 , appelée aussi vitesse en orbite basse, est définie comme la vitesse devant être communiquée à un point matériel pour qu'il parcoure une orbite circulaire autour du centre de la terre à une altitude nulle.

On a donc $r_o = R_T$ ce qui donne : $v_1 = \sqrt{gR_T}$ A.N : $v_1 = 7,9 km.s^{-1}$

b. Vitesse de libération de l'attraction terrestre.

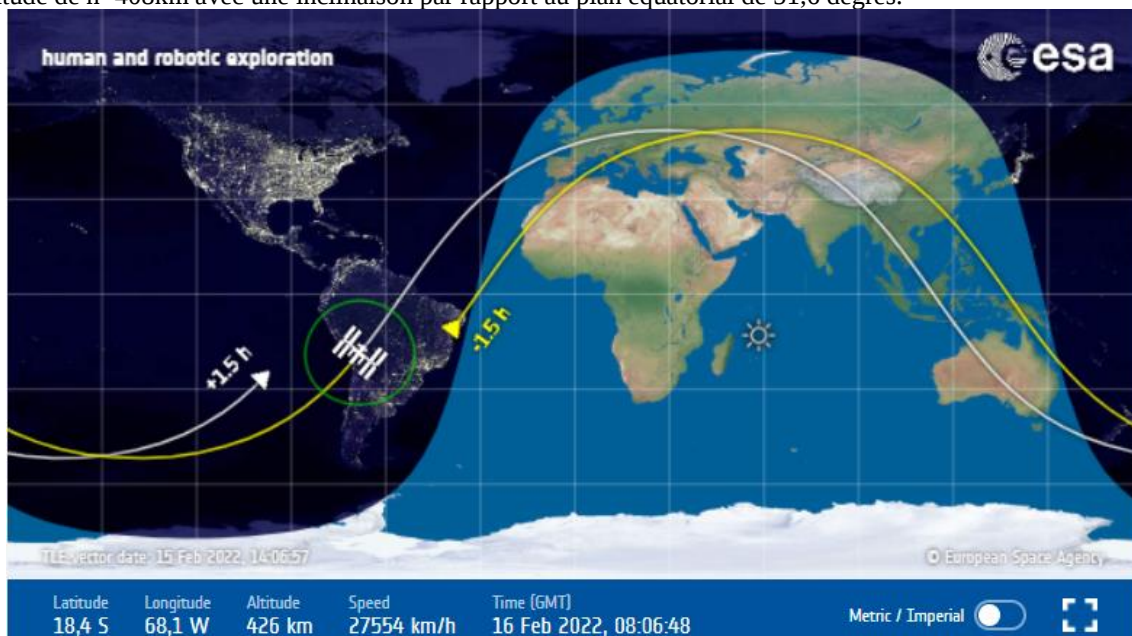
Définition et expression : La seconde vitesse cosmique v_2 , appelée aussi vitesse de libération, est définie comme la vitesse minimale devant être communiquée à un point matériel pour qu'il échappe à la gravité terrestre au départ de la Terre, ce qui correspond à une énergie mécanique nulle.

On obtient donc $E_M = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{mgR_T^2}{R_T} = 0$ ce qui donne $v_2 = \sqrt{2gR_T}$ A.N : $v_2 = 11,2 km.s^{-1}$

3.5. Exemples de satellites.

a. Satellite en orbite basse, exemple de la station spatiale internationale.

La station spatiale internationale est un satellite de la Terre bien connu puisqu'il a connu une grande popularité avec les missions de Thomas Pesquet. Elle est placée sur une orbite quasi-circulaire autour de la Terre à une altitude de $h=408km$ avec une inclinaison par rapport au plan équatorial de 51,6 degrés.



- Le rayon de la trajectoire est donc de $r_O = R_T + h = 6,77.10^3 \text{ km}$
- On utilise à nouveau $M_T G = g R_T^2$, sa période de rotation est alors $T = 2\pi \sqrt{\frac{r_O^3}{g R_T^2}} = 1\text{h}32 \text{ min}$, elle fait donc entre 15 et 16 rotations par jour.
- La vitesse de la station le long de sa trajectoire est $v = \sqrt{\frac{g R_T^2}{r_O}} = 7,67.10^3 \text{ m.s}^{-1} = 2,76.10^4 \text{ km/h}$
- La figure suivante montre la « trajectoire » de l'ISS reportée sur la surface de la Terre. On observe facilement que l'objectif de l'inclinaison de $51,6^\circ$ est de faire en sorte que l'ISS passe au-dessus de tous les points « fortement » peuplé à la surface de la Terre, permettant ainsi son observation par toute personne que cela intéresserait.

b. Altitude et position d'un satellite géostationnaire.

Le mouvement d'un satellite géostationnaire doit être synchrone de la rotation de la terre et sa période de révolution autour de la Terre est donc d'un jour.

- On modifie à nouveau l'expression de la période de rotation en utilisant la relation : $g = \frac{M_T G}{R_T^2}$

pour obtenir un rayon de l'orbite $r_{\text{géo}} = \sqrt[3]{\frac{g T^2 R_T^2}{4\pi^2}}$ et l'altitude : $h = \sqrt[3]{\frac{g T^2 R_T^2}{4\pi^2}} - R_T$

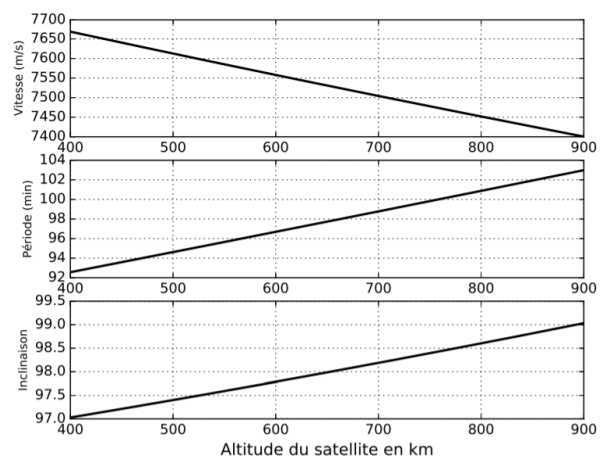
- On obtient : $r_{\text{géo}} = 4,22.10^4 \text{ km}$ et $h = 3,59.10^4 \text{ km}$
- En se référant à la figure précédente sur l'ISS, on comprend également facilement que le satellite sera géostationnaire c'est-à-dire perpétuellement au-dessus d'un même point à la surface de la Terre, si son inclinaison est nulle, il ne peut donc être placé que dans le plan équatorial.
- Les orbites géostationnaires sont utilisées pour les satellites Télévision-Radio, téléphonie et transmission de données, certains satellites météo observant une grande zone fixe,

c. Satellite en orbite polaire à défilement.

Dans cette catégorie, on trouve beaucoup de satellites d'observation et d'imagerie dont la catégorie des observateurs héliosynchrones dont l'objectif est de repasser au-dessus d'un même point toutes les 24h pour faire une observation de ce point dans les mêmes conditions d'éclairage à chaque passage (de jour, de nuit, à l'aube, etc...).

Pour comprendre les lois qui dirigent le comportement de ces satellites, il faut tenir compte de l'aspect non ponctuel de la Terre et de son aplatissement au niveau des pôles, ce qui est hors de portée avec notre programme. On trouve dans le cours suivant les abaques données ci contre.

https://mvaisat.wp.imt.fr/files/2018/01/polysatel_TPT_V2.pdf



d. Le système GPS.

Le système GPS s'appuie sur une constellation de 24 satellites (chacun faisant 500kg), phasé (2/1) c'est-à-dire qu'ils repassent sur le même point à la surface de la Terre toutes les deux révolutions autour de la Terre), régulièrement répartis sur six orbites circulaires, déphasées de 60° , inclinées de 55° sur le plan équatorial, à une altitude de 20184km, donnant une période de 12h (en première approximation). Cette répartition garantit la visibilité en permanence d'au moins six satellites en tout point du globe.

- Dédire du théorème du moment cinétique la conservation du moment cinétique.
- Connaître les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
- Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective en référence au mouvement radial du système.
- Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier la nature du mouvement (état lié / état de diffusion) au signe de l'énergie mécanique.
- Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- Montrer que le caractère circulaire du mouvement implique le caractère uniforme et savoir exprimer dans ce cas la vitesse, la période (lien avec la 3^{ème} loi de Kepler) et l'énergie mécanique.
- Satellite géostationnaire : calculer l'altitude du satellite et justifier sa localisation dans le plan équatorial
- Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération. Exprimer ces vitesses et connaître leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.

Annexe au cours : Etablissement de la nature des trajectoires (HP).

Les trajectoires observées pour les planètes étaient connues pour être des ellipses : $r(\theta) = \frac{r_O}{1 + e \cos(\theta)}$

En observant cette expression, on imagine que la variable : $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1 + e \cos(\theta)}{r_O}$ est une bonne candidate pour effectuer un changement de variable dans la recherche de l'équation de la trajectoire.

a. Formules de Binet.

Les formules de Binet consistent à exprimer le carré de la norme de la vitesse et le vecteur accélération en fonction de u et de ses dérivées par rapport à θ . Effectuons la démonstration pour la seconde.

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \quad \text{on exploite ici encore le fait que : } C = r^2\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{u^2}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\dot{u}}{u^2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta}\right) = -C \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -C\dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \text{ et } r\dot{\theta}^2 = C^2 u^3$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} = 2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) \cdot u^2 C = -2 \frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} \cdot u^2 C = -2C^2 u^2 \frac{du}{d\theta} \text{ et } r\ddot{\theta} = \frac{1}{u} \frac{d}{dt}(Cu^2) = 2C \frac{du}{dt} = 2C\dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = 2C^2 u^2 \frac{du}{d\theta}$$

$$\vec{a}_{M/R} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$$

Par les mêmes méthodes, on obtient : $\|\vec{v}_{M/R}\|^2 = C^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right)$

b. Traduction de l'équation du mouvement.

On applique le PFD au point matériel soumis à la force gravitationnelle dans un référentiel supposé galiléen :

$$m \cdot \vec{a}_{M/R} = -\frac{mGM}{r^2} \vec{e}_r \text{ ce qui se traduit par : } -C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -GM u^2$$

On obtient alors l'équation : $\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = \frac{1}{r_O}$

La solution générale de cette équation sans second membre est : $f(\theta) = A \cos(\theta + \varphi)$

La solution particulière trouvée est : $f_p(\theta) = \frac{1}{r_O}$

On obtient alors : $u(\theta) = \frac{1}{r_O} + A \cos(\theta + \varphi) = \frac{1 + e \cos(\theta + \varphi)}{r_O}$

Et la trajectoire est donnée par : $r(\theta) = \frac{r_O}{1 + e \cos(\theta + \varphi)}$

On obtient donc pour trajectoire des coniques de paramètre $r_O = \frac{mC^2}{-k}$

De plus $E_M = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_{M/R}\|^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m C^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) - m \frac{C^2}{r_O} u = \frac{mC^2}{2r_O^2} (e^2 - 1)$

c. Conclusion.

Les trajectoires obtenues dans le cas d'une interaction de type newtonienne sont des coniques dont l'équation sera donnée, en choisissant bien l'axe par rapport auquel on définit l'angle θ : $r(\theta) = \frac{r_O}{1 + e \cos(\theta)}$

où le paramètre de la conique est : $r_O = \frac{mC^2}{-k}$ et l'excentricité est donnée par : $E_M = \frac{mC^2}{2r_O^2} (e^2 - 1)$

- Si l'énergie mécanique est positive, $e > 1$, on obtient une branche d'hyperbole ce qui correspond bien à un état de diffusion.
- Si l'énergie mécanique est nulle, $e = 1$, on obtient une parabole.
- Si l'énergie mécanique est négative, $e < 1$, on obtient une ellipse qui correspond bien à un état lié.
- Si l'énergie mécanique correspond au minimum de l'énergie potentielle effective, $e = 0$, on obtient une trajectoire circulaire.