

Problème 1 : fonctionnement d'un TMD.

La minimisation des oscillations provoquées par le vent dans les gratte-ciels a récemment débouché sur la mise au point de systèmes asservis appelés « Tuned Mass Damper » (TMD). Schématiquement, un TMD est un oscillateur placé en sommet de structure, et dont les oscillations sont couplées à celles de la structure de sorte à minimiser ces dernières.

A. Modélisation de l'élasticité transverse d'une tour

On considère une tour comme une tige rigide sans masse de longueur ℓ constante :

- fixée au sol par son extrémité basse grâce à une liaison pivot parfaite O, telle que la tige peut tourner sans frottement autour de O. On note $\theta(t)$ la position angulaire de la tige par rapport à la verticale et on introduit la base polaire associée (voir figure ci contre).
 - à laquelle est fixée, en son extrémité haute, une masse m . On va étudier par la suite le mouvement de la position M de cette masse.
1. Etablir les expressions du vecteur position $\vec{OM}$, du vecteur vitesse $\vec{v}_{M/R}$ et du vecteur accélération $\vec{a}_{M/R}$ dans la base polaire en fonction de ℓ , θ et des dérivées par rapport au temps de θ .

L'élasticité transverse de la tour tend à la ramener dans une position verticale si elle s'en écarte. Pour traduire cet effet, on admet que tout se passe comme si :

- la masse m était fixée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide $\ell_0=0$.
- ce ressort était fixé à son autre extrémité en un point H astreint à se déplacer sans frottement sur la verticale en pointillés de sorte que le ressort reste toujours horizontal (voir encore la figure ci contre).

On note g l'intensité du champ de pesanteur, supposé vertical uniforme et descendant. On modélise l'action de la tige rigide sur la masse m par une réaction purement radiale.

2. Faire un schéma reprenant la figure fournie sur lequel on fera figurer les forces qui s'appliquent sur M.
3. Exprimer la longueur HM du ressort en fonction de ℓ et θ . En déduire l'expression de la force de rappel par exercée par le ressort sur M.
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
5. Simplifier cette équation dans le cas des petits angles. Montrer qu'on peut se ramener à l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 à exprimer, en explicitant la condition que doit vérifier par m , g , k et ℓ .

En supposant que la condition précédente est vérifiée, on considère une situation correspondant à une secousse brusque pour laquelle les conditions initiales sont $\theta(t=0)=0$ et $\dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0>0$.

6. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ sur l'intervalle $t>0$, en déduire l'expression de la position angulaire maximale $\theta_{\max}$ atteinte par la tour, uniquement en fonction de $\dot{\theta}_0$ et ω_0 .

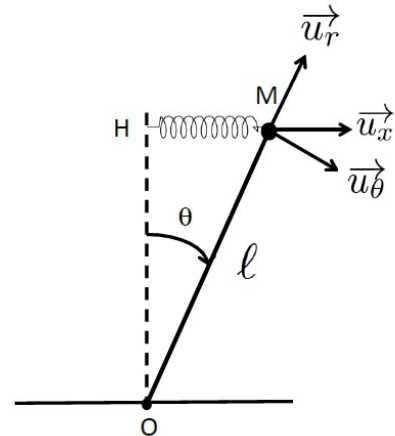
B. Etude d'une tour équipée d'un « TMD ».

On adjoint à la tour étudiée précédemment un TMD. On admet que l'action du TMD sur la tour est assimilable à une force de frottement fluide supplémentaire de la forme $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ (où $\vec{v}$ est la vitesse du point M).

7. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. La simplifier dans l'approximation des petits angles. Toujours avec la condition précédente vérifiée, montrer qu'elle peut se mettre sous la forme canonique $\delta\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \delta\dot{\theta} + \omega_0^2 \delta\theta = 0$, vérifier que la pulsation propre est identique au système précédent et préciser l'expression du facteur de qualité.
8. Quelle valeur doit prendre le coefficient de qualité pour que régime transitoire soit de type apériodique critique ? Déterminer l'expression de la solution générale de l'équation différentielle. Etablir alors l'expression de $\theta(t)$ sur l'intervalle $t>0$ dans les mêmes conditions qu'à la question 6.
9. Déterminer l'expression de $\theta_{\max}$ atteinte par la tour et commenter.

On considère maintenant que le mouvement du sol lors d'un tremblement de Terre est purement horizontal orienté selon l'axe (Ox) et purement sinusoïdal $X_0(t) = x_0 \cos(\omega t)$ ($x_0 > 0$). Dans le référentiel de la tour qui devient non galiléen, on peut appliquer la seconde loi de Newton en lui ajoutant une force d'inertie d'entraînement exprimée par $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 x_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

10. Etablir la nouvelle équation du mouvement du point M. La simplifier aux petits angles et montrer qu'elle se met sous la forme $\delta\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \delta\dot{\theta} + \omega_0^2 \delta\theta = \omega^2 A \cos(\omega t)$. Vérifier que ω_0 et Q ont la même expression que précédemment et établir l'expression de A en fonction de x_0 et ℓ .
11. Traduire cette équation pour obtenir l'expression de l'amplitude complexe $\delta\theta_0(j\omega)$ en notation complexe. Identifier la nature du filtre équivalent au comportement de la tour.



12. On pose $y = \frac{\omega_0}{\omega}$. Exprimer $\delta\theta_0(y)$ en fonction de y , puis exprimer l'amplitude réelle des oscillations $\delta\theta(y)$.
13. Montrer alors que la valeur du facteur de qualité choisi permet de s'assurer que la tour ne présente pas de résonance en amplitude.

Problème 2 : confinement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique.

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe (Oz) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ constitué de N spires de rayon a , régulièrement réparties sur une longueur $d \gg a$. Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité I constante. Le solénoïde crée alors en tout point de l'espace intérieur un champ magnétostatique uniforme exprimé par $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z = \mu_0 \frac{NI}{a} \vec{u}_z$.

On considère un cation de masse m et de charge électrique $+e$ à l'intérieur du solénoïde, qui est donc soumis au champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

1. Exprimer la force de Lorentz qui s'exerce sur le cation. Montrer que la puissance de cette force est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve.

Par la suite, on notera v_0 la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose dans un premier temps que le mouvement du cation se fait selon une trajectoire circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétostatique $\vec{B}$.

2. Représenter sur un schéma la trajectoire circulaire et le champ magnétostatique. Introduire alors la base polaire adaptée et montrer que le rayon de la trajectoire, noté r_L et appelé rayon de Larmor s'exprime sous la forme $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ où $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ est une pulsation dont on donnera le nom. Indiquer le sens dans lequel la trajectoire circulaire est parcourue.

Dans le sujet originel, on ne fait pas l'étude de cette manière mais la démonstration passe par deux questions qui sont reproduites en 3 et 4. Ces deux questions sont donc optionnelles et peuvent être mises de côté pour aborder directement la question 5.

On suppose dans un premier temps que le mouvement du cation se fait dans un plan perpendiculaire au champ magnétique.

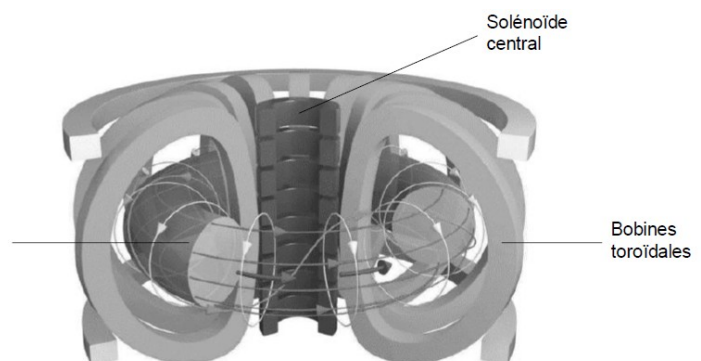
3. Représenter sur un schéma le vecteur vitesse $\vec{v}$ du cation, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan du schéma et la force magnétique $\vec{F}_m$. Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère de Frenet.
4. Exprimer l'accélération du cation dans le repère de Frenet en fonction de la norme v_0 constante de la vitesse et du rayon de courbure r de la trajectoire. Montrer que la trajectoire du cation est circulaire, de rayon $r_L = \frac{v_0}{\omega_c}$ appelé rayon de Larmor, avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$.
5. Montrer que l'énergie cinétique associée au mouvement transverse peut s'écrire $E_{C\perp} = \mu B_0$ et exprimer la constante μ en fonction de e , B_0 , r_L et m .

On suppose maintenant que la cation possède une vitesse initiale v_0 parallèle au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

6. En projetant la seconde loi de Newton selon $\vec{u}_z$, montrer que la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{u}_z$ est constante. En déduire que le mouvement du cation est rectiligne uniforme. Peut-on dire que le cation est confiné ?

Pour une vitesse initiale quelconque du cation qu'on notera $\vec{v}_i = v_{0\perp} \vec{u}_\theta + v_{0\parallel} \vec{u}_z$, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique.

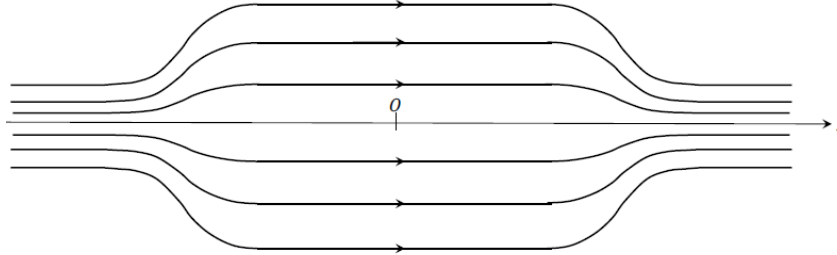
7. Quel nom donne-t-on à ce type de trajectoire ? Faire une représentation graphique. Définir le pas de la trajectoire et donner son expression en fonction de $v_{0\parallel}$ et ω_c .
8. Exprimer l'énergie cinétique du cation en fonction de $v_{0\parallel}$ et μB_0



Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore, qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales.

9. Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale ?
10. Donner la valeur numérique de la charge électrique et calculer le rayon de Larmor pour un cation d'hélium ${}^4_2\text{He}^+$ de masse $m=6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ de vitesse $v_0=3 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique d'amplitude $B_0=12 \text{ T}$. Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2m à l'horizontale et de 3,4m à la verticale.

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une "bouteille magnétique", qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la figure ci-dessous.



On sait que le flux du champ magnétique se conserve le long d'un tube de champ magnétique, ce qui implique qu'il y a conservation du produit $\Phi = B_z(z)S(z)$ où $B_z(z)$ est la composante du champ magnétique selon $\vec{u}_z$ dans une section circulaire d'aire $S(z)$ dans un plan perpendiculaire à l'axe (Oz).

11. Proposer une représentation graphique de la norme $B(z)$ du champ magnétique en fonction de z .

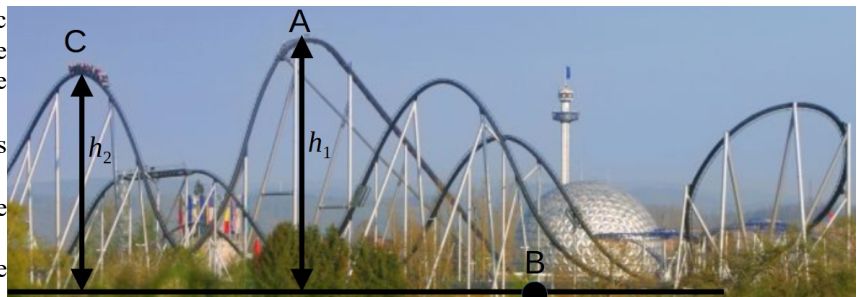
On considère un cation qui suit une trajectoire hélicoïdale de rayon r_L d'axe (Oz) avec un vecteur vitesse $\vec{v}_i = v_{O\perp} \vec{u}_\theta + v_{O//} \vec{u}_z$ dans la zone centrale de la bouteille magnétique où on suppose que le champ magnétique reste constante de norme B_0 . Lorsque le champ magnétique devient variable sur les bords de la bouteille magnétique, on montre qu'il prend la forme suivante $\vec{B} = -\frac{r_L(z)}{2} \frac{dB_z}{dz}(z) \vec{u}_r + B_z(z) \vec{u}_z$; la trajectoire du cation reste semblable à la situation précédente sauf que le rayon $r_L(z)$ et la pulsation $\omega_c(z)$ sont variables dans l'espace. On supposera que leurs expressions en fonction du champ magnétique restent identiques à la situation précédente mais en remplaçant B_0 par $B_z(z)$.

12. Montrer que la force magnétique agissant sur le cation présente une composante selon l'axe (Oz) qui s'exprime sous la forme $F_z = -m \frac{v_{O\perp}^2}{2 B_z(z)} \frac{dB_z}{dz}$
13. Montrer alors que dans les zones latérales de la bouteille magnétique, la force déterminée ci-dessus est une force de rappel vers l'origine O.
14. Exprimer l'énergie cinétique de la particule en fonction de m , $v_{//}$, μ et B_z . En déduire que la particule ne peut pas entrer dans une zone où la composante B_z du champ dépasse une valeur maximale $B_{\max}$ que l'on exprimera en fonction de E_c et μ .
15. Quel type de mouvement est alors possible pour un cation dans la bouteille ? On distinguera deux situations en fonction de la valeur de l'énergie cinétique. Quel cas correspond à un cation confiné dans la bouteille ?

Problème 3 : montagnes russes.

Le manège « Silverstar » du parc d'attraction EuropaPark dont le parcours est représenté ci-contre possède les spécificités suivantes :

- Masse du train et des passagers $m=16 \cdot 10^3 \text{ kg}$
- Hauteur de la première chute $h_1=67 \text{ m}$
- Hauteur de la première bosse : $h_2=55 \text{ m}$
- Vitesse maximale : $v_{\max}=127 \text{ km/h}$.

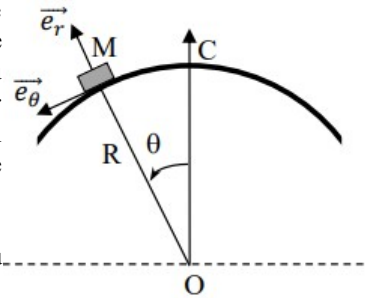


Le train est modélisé par un point matériel M de masse m . Nous supposons que tous les frottements peuvent être négligés pour toutes les questions. L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ avec $g=9,8 \text{ m.s}^{-2}$. On considère que le train se lance au point A avec une vitesse de l'ordre de $v_A=5 \text{ km/h}$

1. Définir un système conservatif et montrer que le train entre dans cette catégorie.

- En exploitant le caractère conservatif, donner l'expression de la vitesse v_B au point B et de la vitesse v_C au point C.
- Faire l'application numérique pour v_B , comparer aux spécificités fournies et commenter.

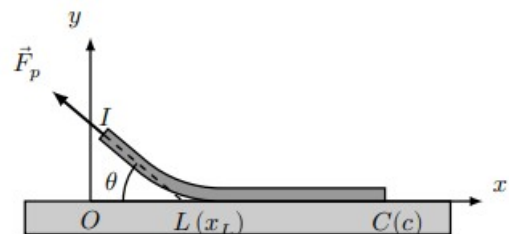
Afin de procurer le maximum de sensations aux passagers, les concepteurs de grand huit multiplient les zones de «Airtimes», où le passager ressent une sensation d'impesanteur (le passager décolle du siège), notamment au passage du train sur une bosse. Pour simplifier l'étude, on modélise le sommet de la bosse par une portion de rail circulaire de rayon $R = 13 \text{ m}$. On étudie le mouvement du train à l'aide des coordonnées polaires (voir schéma ci-dessous) On note C le point le plus haut de la bosse.



- Établir l'expression de l'accélération de M sur la portion circulaire.
- Montrer qu'en un point M de la bosse, la norme de la réaction normale du rail sur le train s'exprime $N = m \left(-\frac{v^2}{R} + g \cos(\theta) \right)$.
- En déduire l'expression de $v_{\min}$ la vitesse minimale pour ressentir une sensation d'impesanteur au point C. Faire les applications numériques pour v_C et $v_{\min}$ et commenter.

Problème 4 : potentiel de Lennard-Jones.

Pour tester les propriétés d'adhésion d'un ruban adhésif, on réalise généralement des essais de pelage. Pour cela, on commence par coller le ruban adhésif à tester sur un support rigide. Puis on mesure la force $F_p = \|\vec{F}_p\|$ qu'il est nécessaire d'appliquer à l'extrémité du ruban pour le décoller du support tout en maintenant un angle θ constant entre le support et la portion de ruban décollée. Le ruban est d'épaisseur a , de largeur b le long de l'axe (Oz) b.



Au niveau microscopique, les interactions qui permettent l'adhésion du ruban sur le support sont des liaisons de Van der Waals. En première approximation, la force de Van der Waals entre deux molécules distantes de r dérive du potentiel de Lennard-Jones $E_{LJ}(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$ où α et β sont des constantes positives.

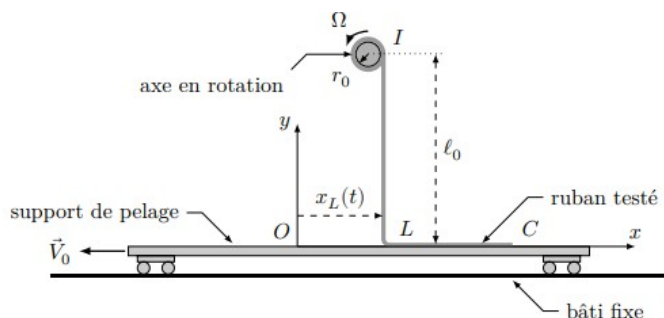
- Identifier, en justifiant la réponse, le caractère attractif ou répulsif de chacun des deux termes figurant dans l'expression du potentiel.
- Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable r_0 pour la distance intermoléculaire et donner son expression en fonction de α et β .
- Faire une représentation graphique du potentiel de Lennard-Jones et indiquer en fonction de l'énergie mécanique la nature de l'état du système étudié. Indiquer sur le graphique à quoi correspond E_0 l'énergie de liaison entre les deux molécules et donner son expression en fonction de α et β .
- Justifier qualitativement que le travail W_{adh} que doit fournir l'opérateur pour décoller le ruban du support est proportionnel à l'aire A de la surface de contact.

Pour la suite du problème, on note $W_{\text{adh}} = \gamma A$ où γ est une constante positive caractéristique du ruban et du support.

On considère que le décollement se fait de façon quasi-statique et que le ruban est parfaitement inextensible. Le problème étant invariant par translation selon Oz, on raisonne dans le plan Oxy. On rappelle que l'angle θ reste constant au cours de cette opération.

- Exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{l}_I$ du point I où la force est appliquée lorsque le front de pelage progresse de dx_L , puis le travail élémentaire δW_p de la force de pelage.
- En déduire l'expression de la force de pelage F_p en fonction de γ , b et θ .

Le dispositif utilisé en pratique est représenté sur la figure ci contre. Le pelage est réalisé au moyen d'une tige horizontale, de rayon r_0 , en rotation autour de son axe, et sur laquelle s'enroule le ruban au cours de l'essai (l'axe de la tige est fixe dans le référentiel du laboratoire et situé à une hauteur ℓ_0 au-dessus du support). Le support sur lequel est collé l'autre extrémité du ruban est animé d'un mouvement de translation horizontale à la vitesse constante $\vec{V}_0$ dans le référentiel du laboratoire.



- Si on suppose que θ reste constant, quelle loi d'évolution de $x_L(t)$ doit on observer ? Quelle relation doit alors lier V_0 et Ω ?
- Initialement, le ruban est positionné pour avoir un angle de pelage $\theta = 90^\circ$. Commenter ce choix.