

Problème 1 : A propos de la sonde Rosetta.

Questions préliminaires

1. La force gravitationnelle exercée par le soleil s'exprime $\vec{F}_S(M) = -\frac{GmM_S}{r^2}\vec{u}$.
2. Le travail élémentaire de la force s'exprime alors : $\delta W = \vec{F}_S \cdot d\vec{OM} = -\frac{mGM_S}{r^2} dr = -d\left(-\frac{mGM_S}{r}\right)$

On met ainsi en évidence que la force de gravité est conservative associée à l'énergie potentielle :

$$E_p(r) = -\frac{mGM_S}{r} \text{ en prenant pour convention une énergie potentielle nulle à distance infinie.}$$

3. On applique le théorème du moment cinétique en T pour le satellite dans le référentiel R_G supposé galiléen : $\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R_S} = \vec{OM} \wedge \vec{F}_S = \vec{0}$

D'après les propriétés du produit vectoriel, le vecteur $\vec{OM}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{L}_O$, **M est donc astreint à se déplacer dans le plan normal à $\vec{L}_O$ et passant par O qui est unique. La trajectoire est plane.**

En introduisant la constante des aires C et le vecteur unitaire $\vec{e}_z$, le moment cinétique s'écrit : $\vec{L}_T = mC\vec{e}_z$.

4. On introduit alors la base polaire (voir schéma ci-contre) dans laquelle :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r \quad \vec{v}_M = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_M = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

5. La loi des aires découle de la conservation de la norme du moment cinétique.

On obtient en utilisant la cinématique : $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{v}_M = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = mC\vec{e}_z$ d'où $r^2\dot{\theta} = C$

D'autre part, l'aire élémentaire balayée par le vecteur position lors d'un déplacement élémentaire s'exprime : $dA = \frac{1}{2}\|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ on

$$\text{obtient alors : } \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

D'où la loi des aires : L'aire balayée par le vecteur position est la même si on considère deux intervalles de temps égaux au cours du déplacement de M.

6. On exploite l'hypothèse d'un rayon constant égal à R_1 et on applique la 2nd loi de Newton :

$$\left(\frac{d\vec{p}_M}{dt}\right)_{R_S} = M_T\vec{a}_M = \vec{F}_S \text{ qu'on projette sur } \vec{e}_r \text{ et } \vec{e}_\theta \text{ pour obtenir } \begin{cases} -R_1\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_S}{R_1^2} \\ R_1\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que la vitesse de rotation est constante et s'exprime $\Omega_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1^3}}$.

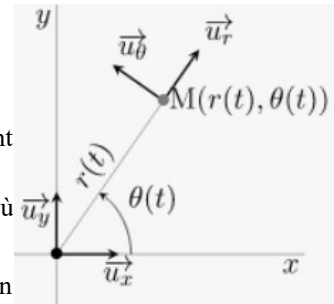
On exprime la période de rotation de la Terre $T = \frac{2\pi}{\Omega_T}$ d'où la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

7. On écrit l'énergie mécanique : $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}M_T(R_1\Omega_T)^2 - \frac{GM_TM_S}{R_1}$ d'où $E_M = -\frac{GM_TM_S}{2R_1}$

8. On exploite la troisième loi de Képler en utilisant la période de révolution sidérale de la Terre autour du soleil $T=365,25$ jours ce qui donne $R_1 = \sqrt[3]{\frac{GM_S T^2}{4\pi^2}} = 1,50 \cdot 10^{11} m$ correspondant bien à 1ua.

On détermine alors numériquement $v_T = R_1\Omega_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}} = 2,98 \cdot 10^4 m.s^{-1}$

9. La troisième loi de Kepler donne pour un satellite autour de la Terre $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$



10. Par définition, un satellite géostationnaire est constamment situé à la verticale au-dessus d'un même point de la planète Terre.

Si on suppose que le plan de la trajectoire n'est pas le plan de l'équateur, le satellite sera nécessairement au-dessus de points situés dans l'hémisphère Nord la moitié du temps et au-dessus de points situés dans l'hémisphère Sud l'autre moitié du temps. Il n'est donc pas toujours au-dessus du même point. On en conclut que le seul plan orbital possible pour un satellite géostationnaire est le plan équatorial.

Pour qu'il soit géostationnaire il faut que sa rotation soit synchrone de la Terre de période 24h.

Le rayon de la trajectoire géostationnaire est alors : $R_{Geo} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 4,22.10^7 m$

Budget énergétique pour transfert orbital.

11. D'après la figure $a = \frac{R_1 + R_2}{2}$

12. Sur une trajectoire circulaire de rayon R_1 : $E_{M,R_1} = -\frac{GmM_S}{2R_1}$ par analogie $E_{M,a} = -\frac{GmM_S}{R_1 + R_2}$

13. Sur la trajectoire circulaire de rayon R_1 : $E_{M,R_1} = E_{C,R_1} + E_{P,R_1}$

avec $E_{M,R_1} = -\frac{GmM_S}{2R_1}$; $E_{P,R_1} = -\frac{GmM_S}{R_1}$ et $E_{C,R_1} = \frac{1}{2}mv_1^2$ d'où $v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}$

Sur la trajectoire elliptique $E_{C,a} = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GmM_S}{R_1} - \frac{GmM_S}{R_1 + R_2}$ d'où $v_e^2 = \frac{2GM_S}{R_1} - \frac{2GM_S}{R_1 + R_2}$ et

$v_e = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1} \left(2 - \frac{2R_1}{R_1 + R_2} \right)} = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1} \frac{2R_2}{R_1 + R_2}}$ On en déduit bien $\Delta v = v_e - v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1} \left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right)}$

14. On sait que $a=3,5ua$ et $R_1=1ua$, on en déduit $R_2 = 2a - R_1 = 6ua$ puis $\Delta v = 9,2.10^3 m.s^{-1}$

Lien entre budget de vitesse et carburant.

15. On exploite l'équation différentielle proposée et on l'intègre entre un état initial où le système présente les caractéristiques (v_i , $m_i=m_0+\Delta m$) et un état final (v_f , $m_f=m_0$) avec Δm la masse de carburant utilisée et m_0 la masse du système propulsé grâce à la combustion de ce carburant ce qui donne :

$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{v_e} \frac{dv}{dt} = \int_{t_i}^{t_f} -\frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$ puis $\frac{1}{v_e} (v_f - v_i) = -\ln \left(\frac{m_f}{m_i} \right)$ ce qui donne bien $\Delta v = v_e \ln \left(1 + \frac{\Delta m}{m_0} \right)$

16. On obtient directement : $r = \exp \left(\frac{\Delta v}{v_e} \right) - 1$

17. L'évaluation numérique donne $v_e = 3,0.10^3 m.s^{-1}$

18. Pour réaliser directement l'injection, il faut produire une variation de vitesse $\Delta v=9,2km.s^{-1}$ ce qui correspond sur la courbe de la figure 2. à un coefficient $r=12,5$ et une masse totale embarquée

$$m_0 + \Delta m = (r+1)m_0 = 1,75.10^4 kg$$

Cette masse est égale à 2,5 fois la charge utile embarquable dans ariane 5, l'injection directe est impossible.

19. L'énergie mécanique du système dans le référentiel géocentrique est conservée, ce qui donne le bilan suivant entre l'état 1 ($r \rightarrow \infty$, v_1) à l'état 2 ($r \rightarrow \infty$, v_2) :

$E_{m1} = E_{m2}$ soit $\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$ et finalement $v_1 = v_2$.

20. La vitesse dans R_S d'un point immobile dans R_T est donné par $\vec{v}_T$, pour un point animé d'une vitesse $\vec{v}_1$

dans R_T , la vitesse dans R_S sera $\vec{v}_{1,S} = \vec{v}_T + \vec{v}_1$ et de même $\vec{v}_{2,S} = \vec{v}_T + \vec{v}_2$

On obtient alors $\vec{v}_{1,S} = v_T \vec{e}_y + v \vec{e}_x$ d'où $v_{1,S} = \sqrt{v_T^2 + v^2}$

et $\vec{v}_{2,S} = v_T \vec{e}_y + v \cos \theta \vec{e}_x + v \sin \theta \vec{e}_y$ d'où $v_{2,S} = \sqrt{v_T^2 + v^2 + 2v_T v \sin \theta}$

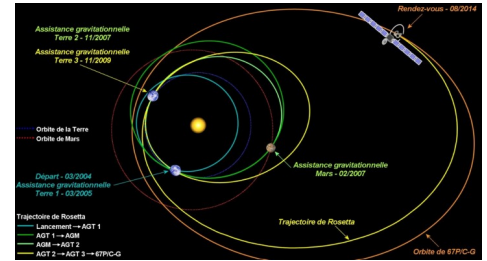
Finalement $\Delta v = \sqrt{v_T^2 + v^2 + 2v_T v \sin \theta} - \sqrt{v_T^2 + v^2}$

21. On obtient $\Delta v = \sqrt{v_T^2 + v^2 + 2v_T v \sin \theta} - \sqrt{v_T^2 + v^2}$ A.N : $\Delta v = 3,3 km.s^{-1}$

22. On observe que sur les $9,2km.s^{-1}$ nécessaire pour atteindre la trajectoire de la comète, $3,3km.s^{-1}$ sont obtenue par une simple

assistance gravitationnelle sans qu'aucun carburant

soit nécessaire. En revanche pour obtenir cet effet d'assistance gravitationnel, il faut que la trajectoire de la sonde soit synchronisée sur la trajectoire des planètes utilisées (Terre, Mars et deux fois Terre pour Rosetta ce qui entraîna une trajectoire de Rosetta qui est composée de trois rotations autour du Soleil) ce qui demande plusieurs années de voyage.



23. On obtient le polynôme suivant en exploitant la relation donnée dans l'énoncé :

$$R^2 + 2\alpha R - \frac{\alpha^2}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 0, \text{ on en déduit le discriminant } 4\alpha^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) = \frac{4\alpha^2}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et les}$$

$$\text{racines } r_{\pm} = \alpha \left(\pm \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 \right) \text{ et puisque } R \text{ est positif on obtient : } R = \alpha \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - 1 \right)$$

L'application numérique donne $R = 2,6 \cdot 10^4 \text{ km}$ ce qui donne $R \approx 4R_T \approx 0,6R_{Géo}$

La trajectoire n'entre pas en collision avec la Terre (ouf) mais sa distance d'approche minimale est tout de même nettement inférieure au rayon des satellites géostationnaires ce qui demanderait de prendre des précautions.

Le théorème de la puissance cinétique donne alors la loi d'évolution : $\frac{dE_M}{dt}(t) = P$ où P est la puissance fournie

$$\text{par les moteurs, ce qui donne : } \frac{dE_M}{dt}(t) = \frac{dE_C}{dt}(t) + \frac{dE_P}{dt}(t) = m_{total} v \frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt} \left(4 \sum_{i=1}^{n_{siège}/2} mgz_i \right)$$

$$\text{Pour le dernier terme on obtient : } \frac{dE_P}{dt}(t) = \left(4mg \sum_{i=1}^{n_{siège}/2} \frac{dz_i}{dt} \right) \text{ où } \left(\sum_{i=1}^{n_{siège}/2} \frac{dz_i}{dt} \right) \text{ est la vitesse moyenne d'ascension}$$

$$\text{des passagers, ce qui donne avec la pente moyenne } p=0,3 \left(\sum_{i=1}^{n_{siège}/2} \frac{dz_i}{dt} \right) = \frac{n_{siège}}{2} pv$$

$$\text{Finalement l'équation d'évolution de l'énergie mécanique s'écrit : } m_{total} v \frac{dv}{dt} + 2mgn_{siège} pv = P$$

$$\text{Ce qui donne : } v \frac{dv}{dt} = \frac{P - 2mgn_{siège} pv}{m_{total}} \text{ qui n'est pas une équation très sympathique...}$$

Evaluons les ordres de grandeurs à droite : $P = 2,25 \cdot 10^5 \text{ W}$ et $2mgn_{siège} pv_O \approx 10^4 \text{ W}$ soit 5% (dans le pire des cas) de la puissance fournie par le moteur. On va tout simplement négliger ce terme pour obtenir un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

$$\text{L'équation devient alors : } v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{P}{m_{total}} \text{ donc } \left(\frac{v^2}{2} \right)(t) = \frac{P}{m_{total}} t \text{ d'où } \left(\frac{v_O^2}{2} \right) = \frac{P}{m_{total}} \tau \text{ où } \tau \text{ est}$$

l'instant où le télésiège atteint sa vitesse nominale.

$$\text{Finalement : } \tau = \left(\frac{m_{total} v_O^2}{2P} \right) \text{ ce qui donne : } \tau = 0,25 \text{ s si on suppose que la masse du système est négligeable}$$

devant la masse des passagers embarqués.

Cette valeur donne probablement un ordre de grandeur correcte, mais elle est clairement sous-estimée à cause des deux hypothèses faites : $m_{système}$ est probablement non négligeable devant $m_{passagers}$, même si c'est difficile de l'évaluer ab initio ; on a négligé l'influence de la variation d'énergie potentielle dans notre estimation.