

Problème 1 : centrale électrique houlomotrice.

1. Le bilan des actions mécaniques sur le système est :

L'action de gravité pris comme un glisseur s'appliquant en G : $M_{\vec{P},Oy} = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_y$

Dans la base cartésienne $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} d \sin \theta \\ 0 \\ d \cos \theta \end{pmatrix}$; $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ ce qui donne $M_{\vec{P},Oy} = mgd \sin \theta$

L'action de la poussée d'Archimède qui est obtenue par la même démarche $M_{\vec{\pi},Oy} = -(\mu_e V)gd \sin \theta$

L'action de la houle toujours par le modèle de glisseur $M_{\vec{F},Oy} = \beta d \cos \theta \cos(\omega t)$

L'action de la liaison pivot qu'on écrit sous la forme $M_{pivot,Oy} = -\alpha \dot{\theta}$

2. On écrit une condition d'équilibre, donc le système est immobile et on ajoute l'hypothèse sans houle, donc seul la gravité et la poussée d'Archimède interviennent : $M_{\vec{P},Oy} + M_{\vec{\pi},Oy} = 0$

On obtient $(m - \mu_e V)gd \sin \theta = 0$, on observe bien que la position $\theta_0=0$ est une position d'équilibre.

Si on écarte le système d'un petit angle $\delta\theta$ par rapport à la position $\theta_0=0$, la position est stable si le moment exercée ramène le système à la position d'équilibre, il doit donc être négatif.

On en conclut que la condition pour que la position d'équilibre $\theta_0=0$ soit stable est $\mu_e V > m$

3. On écrit le théorème du moment cinétique pour le système par rapport à (Oy) pour obtenir l'équation du mouvement du système : $J\ddot{\theta} = (m - \mu_e V)gd \sin \theta - \alpha \dot{\theta} + \beta d \cos \theta \cos(\omega t)$

4. On effectue la linéarisation des différents termes autour de la position $\theta_0=0$ ce qui donne $J\ddot{\theta} = (m - \mu_e V)gd \theta - \alpha \dot{\theta} + \beta d \cos(\omega t)$ qu'on met sous la forme fournie

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_o}{Q} \dot{\theta} + \omega_o^2 \theta = \Omega_o \cdot \cos(\omega t) \quad \text{où} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{(\mu_e V - m)gd}{J}} \quad Q = \frac{\sqrt{(\mu_e V - m)gdJ}}{\alpha} \quad \text{et} \quad \Omega_o = \frac{\beta d}{J}$$

5. On exprime et évalue $f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mu_e V}{m} - 1\right) \frac{g}{d}} = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ Hz}$.

6. On introduit le signal complexe $\underline{\theta}(t) = \underline{\theta}_o \exp(j\omega t)$ pour lequel l'équation différentielle se traduit

$$\text{par } \underline{\theta}(t) \left(-\omega^2 + j \frac{\omega_o}{Q} \omega + \omega_o^2 \right) = \Omega_o \cdot \exp(j\omega t) \quad \text{On en déduit} \quad \underline{\theta}_o(\omega) = \frac{\Omega_o}{\omega_o^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_o}{Q} \omega}$$

On observe que le module de cette amplitude tend vers une valeur nulle lorsque $\omega \rightarrow \infty$ et tend vers une valeur non nulle $\frac{\Omega_o}{\omega_o^2}$ lorsque $\omega \rightarrow 0$. On en déduit que le système réalise un filtre de type passe bas.

7. Le système laisse passer les basses fréquences et sera donc mis en mouvement par la houle de fréquences typiques 10^{-1} Hz puisque ces fréquences se situent sous la fréquence propre du filtre. Il resterait à vérifier le facteur de qualité pour que la fréquence de coupure s'identifie à la fréquence propre.

8. On reprend le TMC ce qui donne $J\ddot{\theta} = (m - \mu_e V)gd \dot{\theta} \sin \theta - \alpha \dot{\theta}^2 + \beta d \dot{\theta} \cos \theta \cos(\omega t)$

et on réinterprète terme à terme

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -P_{diss}(\text{pivot}) + P_{houle}$$

Où $\frac{dE_c}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta}$; $\frac{dE_p}{dt}(t) = (\mu_e V - m)gd \dot{\theta} \sin \theta$; $P_{diss} = \alpha \dot{\theta}^2$ et $P_{houle} = \beta d \dot{\theta} \cos \theta \cos(\omega t)$

La puissance fournie par la houle entraîne alors des variations périodiques de E_c et E_p non extraites du système et le seul terme réduisant l'énergie mécanique en permettant d'envisager une conversion en énergie électrique est celui tenant compte de la dissipation par la liaison pivot.

$$9. \quad \theta(t) = \theta_o \cos(\omega t + \varphi) ; \dot{\theta}(t) = -\omega \theta_o \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \theta_o = |\theta_o| = \frac{\Omega_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_o}{Q} \omega\right)^2}}$$

$$\text{ce qui donne} \quad P_{diss} = \frac{\alpha \omega^2 \Omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_o}{Q} \omega\right)^2} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{puis} \quad \langle P_{diss} \rangle = \frac{0,5 \alpha \omega^2 \Omega_o^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_o}{Q} \omega\right)^2}$$

10. On obtient l'allure suivante pour la courbe d'évolution de la puissance moyenne dissipée en fonction de la fréquence.

