

Problème 1 : A propos de la sonde Rosetta.

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guerassimenko (67P/TG). La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014 pour une période d'observation de 18 mois.

Grandeurs physiques :Masse du Soleil : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kgMasse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kgRayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) = $1,50 \cdot 10^8$ kmRayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ kmConstante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ **Données techniques relatives à Rosetta :**Masse à vide de Rosetta : $1,30 \cdot 10^3$ kgCharge utile du lanceur Ariane 5G+ : $6,95 \cdot 10^3$ kg**Questions préliminaires**

On considère le Soleil comme centre attractif gravitationnel situé en O pris comme origine du référentiel héliocentrique R_S supposé galiléen.

- Donner l'expression de $\vec{F}_S(M)$ la force gravitationnelle exercée par le soleil sur un objet ponctuel de masse m situé au point M, à une distance r du soleil en fonction de G , M_S , m , r et $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$.
- Montrer que cette force est conservative et dérive d'une énergie potentiel $E_{p,S}(r)$ à exprimer en fonction de G , M_S , m et r .
- Montrer la conservation de $\vec{L}_O(M)$ moment cinétique en O pour le point matériel M, en déduire la planéité du mouvement. Donner alors une expression de ce moment cinétique en introduisant la constante des aires C et un vecteur unitaire qu'on notera $\vec{e}_z$.
- Introduire alors à l'aide d'un schéma la base de projection adaptée à l'étude du mouvement plan du point matériel et exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans cette base.
- Démontrer la loi des aires.

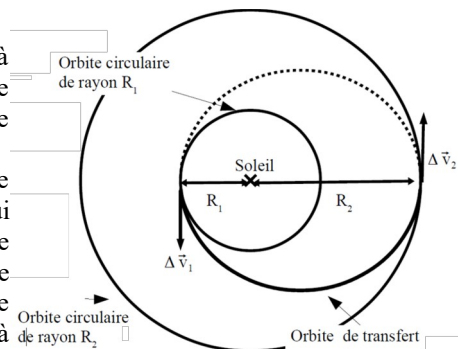
On étudie le mouvement de la Terre T de masse M_T sur une trajectoire circulaire de rayon R_1 autour du Soleil.

- Déterminer par une étude mécanique l'expression de Ω_T la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil en fonction de G , M_S et R_1 . En déduire la troisième loi de Kepler.
- Déterminer l'expression de l'énergie mécanique de la Terre en fonction de G , M_S , M_T et R_1 .
- A partir des données en début d'énoncé, vérifier la valeur fournie pour une unité astronomique et évaluer numériquement la vitesse v_T de la Terre le long de sa trajectoire circulaire.

Budget énergétique pour transfert orbital.

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite de transfert elliptique appelée aussi orbite de transfert de Hohmann.

Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2 , permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée. On envisage de réaliser la transition d'une orbite circulaire à l'autre pour une sonde de masse m .



- Déduire de la figure l'expression du demi grand axe a en fonction de R_1 et R_2 .
- Rappeler l'énergie mécanique de la sonde (de masse m) sur la trajectoire circulaire de rayon R_1 . En exploitant une analogie à préciser, donner l'expression de l'énergie mécanique de la sonde sur l'orbite de transfert en fonction de G , M_S , m , R_1 et R_2 .
- Montrer que la variation de vitesse à fournir pour passer de l'orbite « basse » de rayon R_1 à l'orbite de

$$\text{Hohmann s'exprime sous la forme } \Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}} \left(\sqrt{2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right)$$

La comète 67P/TG possède déjà une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est proche de $a=3,5 \text{ ua}$ et dont le périhélie est proche de $R_1=1 \text{ ua}$. Puisque la Terre possède une orbite quasi circulaire de rayon 1 ua , On suppose qu'on peut directement injecter la sonde de l'orbite circulaire de rayon R_1 à l'orbite de la comète en lui fournissant la seule impulsion Δv_1 précédente lorsqu'elle passe au voisinage de la Terre.

- Déduire de la description faite la valeur numérique de R_2 (en ua) et évaluer numériquement le « budget de vitesse » Δv_1 à fournir pour effectuer ce transfert.

Le budget Δv permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à un budget Δv_i , le budget total Δv correspond à la somme de ces dernières.

On prendra pour la suite du problème une valeur de Δv pour rejoindre la comète 67P/TG de $9,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Lien entre budget et carburant.

La propulsion de Rosetta est assurée par 24 petits moteur-fusées à ergols liquides. Les moteurs permettent d'effectuer les corrections orbitales au cours du long périple de la sonde afin de placer celle-ci en orbite autour de la comète. Nous cherchons à estimer la masse d'ergols nécessaire à la réalisation de la mission.

L'éjection de gaz par les tuyères des propulseurs permet de modifier la vitesse de la sonde. On considère un mouvement rectiligne de la sonde. L'équation du mouvement de la sonde propulsée par éjection du gaz est donnée par l'équation $m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} v_e$ où v_e est la vitesse d'éjection des gaz.

13. En considérant que la vitesse d'éjection est constante, montrer que la variation de vitesse Δv est exprimée par $\Delta v = v_e \ln \left(1 + \Delta \frac{m}{m_0} \right)$ où Δm est la masse de carburant utilisée pour produire la variation de vitesse Δv et m_0 la masse du système propulsé.

Cette relation est appelée équation de Tsiolkovski. Elle relie l'accroissement de vitesse au cours d'une phase de propulsion d'un objet (sonde, fusée ...) doté d'un moteur à réaction au rapport de sa masse initiale à sa masse finale.

14. La quantité de carburant nécessaire à une mission est souvent quantifiée par le paramètre r défini par la relation $r = \frac{\text{masse de carburant}}{\text{masse du véhicule vide}}$. Déterminer l'expression de r en fonction de v_e et Δv .

L'ergol utilisé dans la propulsion présente une masse molaire $M = 30 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, une capacité molaire $C_{pm} = 33 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et une température de combustion $T_{\text{comb}} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ K}$. On montre alors que

la vitesse d'éjection des gaz s'écrit $v_e = \sqrt{\frac{2 C_{pm} T_{\text{comb}}}{M}}$

15. Evaluer numériquement v_e .

A partir des résultats précédents, on a tracé l'évolution de la valeur du coefficient r en fonction de Δv .

16. Evaluer la masse totale à embarquer si on veut effectuer l'injection directe de Rosetta sur l'orbite de la comète. Montrer alors que cette stratégie n'est pas envisageable.

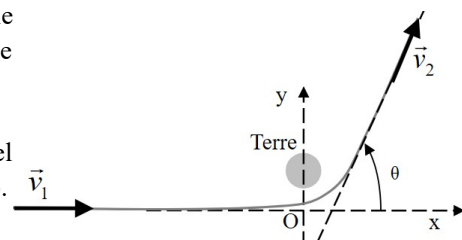
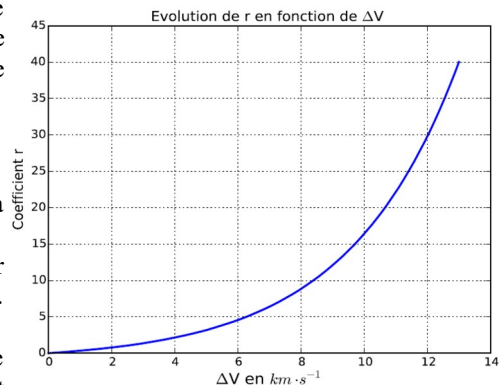
Afin de contourner les problèmes liés à la quantité limitée d'ergols, la sonde Rosetta a utilisé une trajectoire permettant d'exploiter l'effet de fronde gravitationnelle (appelé aussi assistance gravitationnelle). Cette stratégie a permis à la sonde d'acquérir de la vitesse en limitant l'utilisation d'ergols. En contre-partie, la durée de la mission devient plus longue... On propose dans cette question une étude simplifiée d'une assistance gravitationnelle. On se place dans le référentiel géocentrique R_T supposé galiléen. La sonde arrive de l'infini (c'est à dire hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre) avec une vitesse $\vec{v}_1$ dans le référentiel R_T . La sonde passe à proximité de la Terre puis s'éloigne ensuite à l'infini avec une vitesse asymptotique $\vec{v}_2$.

17. Montrer que la norme de la vitesse vérifie $v = \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\|$

On suppose que $\vec{v}_T = v_T \vec{e}_y$ la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique R_S est dirigée dans la direction et le sens de l'axe (Oy).

18. Exprimer les vitesses $\vec{v}_{1,S}$ et $\vec{v}_{2,S}$ de la sonde dans le référentiel héliocentrique en fonction de $\vec{v}_T$, $\vec{v}_1$, et $\vec{v}_2$. En déduire leur norme $v_{1,S}$ et $v_{2,S}$ en fonction de v_T , v et θ .

19. Evaluer numériquement le budget de vitesse gagné par une assistance gravitationnelle en prenant $v = 5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $\theta = 45^\circ$ et la valeur de v_T obtenue précédemment et commenter.



Il reste à vérifier que cette assistance gravitationnelle est réalisable. Pour cela, on donne la relation liant l'angle de déviation θ à R la distance minimale d'approche de la Terre $\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{R(R+2\alpha)}}$ avec $\alpha = \frac{GM_T}{v^2}$.

20. Déterminer le polynôme dont R est une des racines. En déduire son expression en fonction de α et $\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$. Faire l'application numérique et commenter.