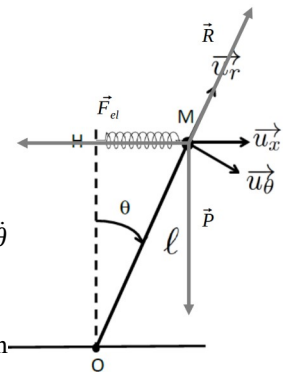


Problème 1 : fonctionnement d'un TMD.

A. Modélisation de l'élasticité transverse d'une tour

1. La cinématique permet d'exprimer $\vec{OM} = l\vec{u}_r$; $\vec{v}_{M/R} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$; $\vec{a}_{M/R} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$
2. Le schéma est donné ci contre.
3. La géométrie donne $HM = l \sin \theta$, on en déduit $F_{el} = -kl \sin \theta \vec{u}_x$
4. On applique la seconde loi de Newton $m \vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{P}_{M/R}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{el}$



On la projette sur la direction \vec{u}_θ : $ml\ddot{\theta} = mgsin\theta - kl \sin \theta \cos \theta$

5. On se place dans le cas des petits angles pour lequel $\theta = 0 + \delta\theta$ alors $\dot{\theta} = 0 + \delta\dot{\theta}$
 $\sin \theta \rightarrow \delta\theta$; $\sin \theta \cos \theta \rightarrow \delta\theta$

L'équation différentielle devient $ml \delta \ddot{\theta} = mg \delta \theta - kl \delta \theta$

Elle peut se mettre sous la forme d'un oscillateur harmonique $\delta \ddot{\theta} + \omega_o^2 \delta \theta = 0$ à condition

que $(kl - mg) > 0$, la pulsation propre s'exprime alors $\omega_o = \sqrt{\frac{kl - mg}{ml}}$.

6. La solution générale de l'équation de l'oscillateur harmonique est : $S_H(t) = A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t)$

Les conditions initiales donnent les relations $\begin{cases} \theta(0) = 0 = A \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_o = \omega_o B \end{cases}$ d'où $\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_o}{\omega_o} \sin(\omega_o t)$ puis $\theta_{max} = \frac{\dot{\theta}_o}{\omega_o}$.

B. Etude d'une tour équipée d'un « TMD ».

7. On applique à nouveau la 2LN $m \vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{P}_{M/R}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{f}$ qu'on projette toujours sur \vec{u}_θ

ce qui donne $ml\ddot{\theta} = mgsin\theta - kl \sin \theta \cos \theta - \lambda l \dot{\theta}$ Aux petits angles, on obtient $ml \delta \ddot{\theta} = mg \delta \theta - kl \delta \theta - \lambda l \dot{\theta}$.

On la met alors sous forme canonique $\delta \ddot{\theta} + \frac{\omega_o}{Q} \delta \dot{\theta} + \omega_o^2 \delta \theta = 0$ par identification $\omega_o^2 = \frac{kl - mg}{ml}$ et $\frac{\omega_o}{Q} = \frac{\lambda}{m}$.

On en déduit la pulsation propre identique $\omega_o = \sqrt{\frac{kl - mg}{ml}}$ et que le facteur de qualité $Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{m}{l} (kl - mg)}$.

8. Pour obtenir un régime apériodique critique, il faut que $Q = 0,5$.

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle s'écrit $r^2 + \frac{\omega_o}{Q} r + \omega_o^2$ de discriminant $\Delta = \omega_o^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = 0$ qui présente alors une racine double $r = -\omega_o$; la solution générale de l'équation est $S_H(t) = (At + B) \exp(-\omega_o t)$

Les conditions initiales donnent les relations $\begin{cases} \theta(0) = 0 = B \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_o = A - \omega_o B \end{cases}$ d'où $\theta(t) = \dot{\theta}_o t \exp(-\omega_o t)$

9. On cherche le maximum atteint par la position angulaire en exprimant sa dérivée

$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_o (1 - \omega_o t) \exp(-\omega_o t)$ qui s'annule en $t_{max} = \frac{1}{\omega_o}$, on en déduit que $\theta_{max}' = \frac{\dot{\theta}_o}{\omega_o \exp(1)}$

L'angle maximal atteint est réduit d'un facteur $e \approx 2,7$ et il n'y aura pas d'oscillations du bâtiment.

10. On applique à nouveau la 2LN $m \vec{a}_{M/R} = \frac{d\vec{P}_{M/R}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{el} + \vec{f} + \vec{F}_{ie}$

qu'on projette toujours sur \vec{u}_θ $ml\ddot{\theta} = mgsin\theta - kl \sin \theta \cos \theta - \lambda l \dot{\theta} + m \omega^2 x_o \cos(\omega t) \cos(\theta)$

Aux petits angles on obtient : $ml \delta \ddot{\theta} = (mg - kl) \delta \theta - \lambda l \delta \dot{\theta} + m \omega^2 x_o \cos(\omega t)$ qu'on met sous la forme

$\delta \ddot{\theta} + \frac{\omega_o}{Q} \delta \dot{\theta} + \omega_o^2 \delta \theta = \omega^2 \frac{x_o}{l} \cos(\omega t)$ où ω_o et Q ont la même expression que précédemment et $A = \frac{x_o}{l}$

11. On traduit l'équation différentielle en remplaçant les dérivées temporelles par des multiplications par $j\omega$ ce

qui donne $\delta \theta_o = \frac{x_o}{l} \frac{\omega^2}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_o}{Q}}$ On identifie un comportement de type filtre passe haut d'ordre 2.

12. On ré exprime en fonction de y : $\delta \theta_o = \frac{x_o}{l} \frac{1}{y^2 - 1 + \frac{j}{Q} y}$ par le module $\delta \theta_o = \frac{x_o}{l} \frac{1}{\sqrt{(y^2 - 1)^2 + \left(\frac{y}{Q}\right)^2}}$

13. La résonance est possible si il existe une valeur non nulle de y pour laquelle l'amplitude réelle passe par un maximum. Il faut donc que $f(y) = (y^2 - 1)^2 + \left(\frac{y}{Q}\right)^2$ présente un minimum.

On exprime la dérivée $f'(y) = 4y(y^2 - 1) + 2\frac{y}{Q^2} = 4y\left(y^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$ qui s'annule si $y=0$ ou si $\left(y^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right) = 0$

Le second cas présente une solution seulement si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ c'est à dire si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dans le TMC étudié, on sait que $Q = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$; il n'y aura alors pas de résonance en amplitude pour les oscillations de la tour.

Problème 2 : Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique.

1. La force de Lorentz s'exprime dans le cas étudié sous la forme $\vec{F}_L = e v_{M/R} \wedge \vec{B}$.

On exprime la puissance de cette force $P_L = \vec{F}_L \cdot v_{M/R} = 0$ car $\vec{F}_L \perp v_{M/R}$ par propriété du produit vectoriel.

En négligeant toutes les autres forces qui s'exercent sur le cation, le théorème de la puissance cinétique permet d'écrire $\frac{dE_C}{dt} = \sum P_{\vec{F} \rightarrow M} = 0$ **l'énergie cinétique est donc conservée au cours du mouvement.**

2. Le schéma est donné ci contre avec la base polaire.

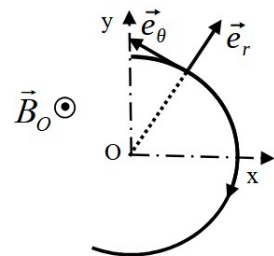
Cinématique $\vec{OM} = r_L \vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = r_L \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta$; $\vec{a}_{M/R} = r_L \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r_L \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = \dot{v} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r_L} \vec{e}_r$

La 2LN donne alors $m \vec{a}_{M/R} = \vec{F}_L$ projection dans la base $\begin{cases} -m \frac{v^2}{r_L} = ev B_0 \\ \dot{v} = 0 \end{cases}$

La norme de la vitesse est donc constante et $v = -r_L \frac{eB_0}{m}$

Le signe négatif montre qu'**avec le schéma fourni le cation tourne dans le sens horaire**

et qu'alors la norme de la vitesse est liée au rayon (dit de Larmor) par $r_L = \frac{v_0}{\omega_C}$ avec $\omega_C = \frac{eB_0}{m}$.

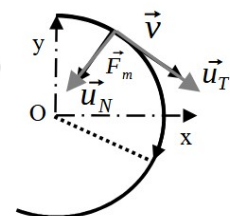


3. Le schéma est maintenant donné ci contre.

4. Dans la base de Frenet $\vec{v}_{M/R} = v_0 \vec{u}_T$ et $\vec{a}_{M/R} = \frac{v_0^2}{r} \vec{u}_r$. On applique la 2LN $m \vec{a}_{M/R} = \vec{F}_m$ qu'on projette dans la base de Frenet ce qui donne $m \frac{v_0^2}{r} = ev_0 B_0$

On en conclut que le rayon de courbure reste constant, ce qui donne bien une trajectoire

circulaire de rayon donné par le rayon de Larmor $r_L = \frac{v_0}{\omega_C}$ avec $\omega_C = \frac{eB_0}{m}$.



5. L'énergie cinétique s'exprime $E_C = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m r_L^2 e^2 \frac{B_0^2}{m^2} = \mu B_0$ avec $\mu = \frac{e^2 r_L^2}{2m} B_0$

6. La 2LN donne $m \vec{a}_{M/R} = \vec{F}_L$ en projection sur \vec{u}_z on obtient $m \dot{v}_z = 0$ On en déduit que $v_z = v_0$ est constante. Le mouvement du cation sera donc bien rectiligne uniforme dans la direction de l'axe (Oz). Le cation est donc libre de partir à l'infini dans la direction de l'axe (Oz).

7. La trajectoire obtenue par combinaison d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan perpendiculaire à (Oz) et d'un mouvement de translation rectiligne uniforme le long de l'axe (Oz) est une hélice de pas constant. Ce pas est la distance parcourue le long de l'axe (Oz) lorsque le cation fait un tour complet autour de l'axe (Oz). On en déduit que $p = v_{O//} \cdot t_0$ où t_0 est le temps mis par le cation pour faire un tour soit

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_C} \text{ donc } p = 2\pi \frac{v_{O//}}{\omega_C}$$

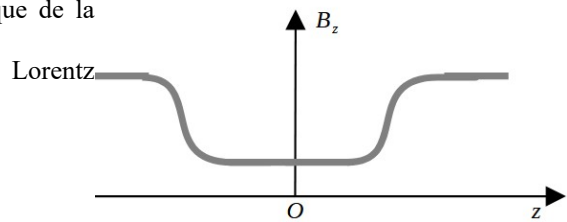
8. On exploite l'expression de l'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (v_{O//}^2 + v_{O\perp}^2) = \frac{1}{2} m v_{O//}^2 + \mu B_0$

9. Lorsqu'on utilise la configuration toroïdale l'axe (Oz) rectiligne précédent est remplacé par un cercle s'enroulant autour du centre de l'axe vertical. La trajectoire est alors une hélice qui s'enroule sur le cercle précédent ce qui permet de confiner les cations.

10. L'application numérique donne $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $r_{L,max} = \frac{mv_O}{eB_O} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})(9 \cdot 10^{10})}{(6,6 \cdot 10^{-27})(12)} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ rayon très petit par rapport aux rayons des bobines toroïdales. Le champ magnétique sera quasiment uniforme sur la trajectoire du cation.

11. On peut proposer une évolution du champ magnétique de la forme suivante.

12. On écrit la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = e \vec{v}_i \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \approx 0 \\ -v_{O\perp} \\ v_{O\parallel} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{-r_L(z)}{2} \frac{dB_z(z)}{dz} \\ 0 \\ B_z(z) \end{pmatrix}$$


On ne prend que la composante selon (Oz) ce qui donne $F_z = -e \frac{v_{O\perp} r_L(z)}{2} \frac{dB_z}{dz} = -m \frac{v_{O\perp}^2}{2 B_z(z)} \frac{dB_z}{dz}$.

13. Avec le graphique, on a visualisé que $B_z(z)$ est décroissant sur la zone $z < 0$ donc $F_z > 0$, un cation qui se dirige dans le sens opposé à l'axe (Oz) est alors ramené vers O. De même $B_z(z)$ est croissant sur la zone $z > 0$ donc $F_z < 0$, un cation qui se dirige dans le sens direct de l'axe (Oz) est alors ramené vers O.

14. L'énergie cinétique se traduit à partir de celle établie en q8 ce qui donne $E_C = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B_z(z)$.

On sait que $\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 > 0$; on en déduit que $E_C - \mu B_z(z) > 0$; il faut donc que $B_z(z) < B_{max} = \frac{E_C}{\mu}$.

15. Si $E_C > \mu B_{max}(z)$, le cation ne sera pas confiné dans la bouteille magnétique, on peut alors parler d'état de diffusion avec un cation qui part vers l'infini. Si $E_C < \mu B_{max}(z)$, le cation est confiné dans la bouteille magnétique, on peut alors parler d'état lié.

Problème 3 : montagnes russes.

1. Un système mécanique est un système dans lequel les seules forces qui apportent du travail sont conservatives.

Dans le système étudié, les forces qui interviennent sont la force de gravité qui est conservative et la réaction des rails sur le train pour laquelle on néglige les frottements. La réaction est donc toujours perpendiculaire à la trajectoire du train, elle ne travaille donc pas. On en conclut bien que le système étudié est conservatif.

2. On associe à la force de gravité conservative l'énergie potentielle $E_p(z) = mgz$; l'énergie cinétique s'exprime $E_C = \frac{1}{2} m v^2$; l'énergie mécanique s'exprime alors $E_M = E_C + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$

On exploite la conservation de l'énergie mécanique pour le système étudié $E_M(A) = E_M(B) = E_M(C)$ qui est conservatif ce qui donne :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_1 \quad \text{d'où} \quad v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m v_C^2 + mgh_2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgh_1 \quad \text{d'où} \quad v_C = \sqrt{v_A^2 + 2g(h_1 - h_2)}$$

3. On obtient $v_B = 131 \text{ km/h}$ Soit une valeur proche de la valeur annoncée. Cette dernière étant légèrement inférieure, on peut en déduire que les frottements travaillent probablement un peu dans le système réel.

4. On fait (à nouveau) la cinématique dans la base polaire : $\vec{OM} = R \vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta$;

$$\vec{a}_{M/R} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = \dot{v} \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

5. On applique la 2LN à M dans le ref. ter. Galiléen : $m \vec{a}_{M/R} = \vec{P} + \vec{R}$ qu'on projette sur \vec{e}_r ce qui donne

$$-m \frac{v^2}{R} = N - mg \cos \theta \quad \text{ce qui donne bien} \quad N = m \left(-\frac{v^2}{R} + g \cos(\theta) \right)$$

6. On obtient $v^2 = R \left(g \cos(\theta) - \frac{N}{m} \right)$ Pour avoir une impesanteur en C au sommet de la courbe, en $\theta = 0$, il faut que la réaction normale s'annule ce qui donne $v_{min} = \sqrt{Rg}$

Les application numériques donnent $v_{min} = 41 \text{ km/h}$ et $V_C = 56 \text{ km/h}$. On peut en déduire qu'il y aura bien un « airtime » en C.

Problème 4 : potentiel de Lennard-Jones.

1. Dans l'expression de l'énergie potentielle, $E_\alpha(r) = \frac{\alpha}{r^{12}}$ donne une force $\vec{F}_\alpha = -\frac{dE_\alpha}{dr}(r) = 12 \frac{\alpha}{r^{13}} \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire des coordonnées polaires. $E_\alpha(r) = \frac{\alpha}{r^{12}}$ est donc associée à une action mécanique répulsive.

De même $E_\beta(r) = \frac{-\beta}{r^6}$ entraîne une force $\vec{F}_\beta = -\frac{dE_\beta}{dr}(r) = -6 \frac{\beta}{r^7} \vec{e}_r$ qui sera attractive.

2. La position d'équilibre est un extremum caractérisé par $\frac{dE_{LJ}}{dr}(r_0) = 0$ ce qui donne $-12 \frac{\alpha}{r_0^{13}} + 6 \frac{\beta}{r_0^7} = 0$

On en déduit que la position d'équilibre est donnée par $r_0 = \left(2 \frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/6}$

On observe alors que $\frac{dE_{LJ}}{dr}(r < r_0) < 0$ et que $\frac{dE_{LJ}}{dr}(r > r_0) > 0$ donc cet extremum est bien un minimum, cette position d'équilibre est stable.

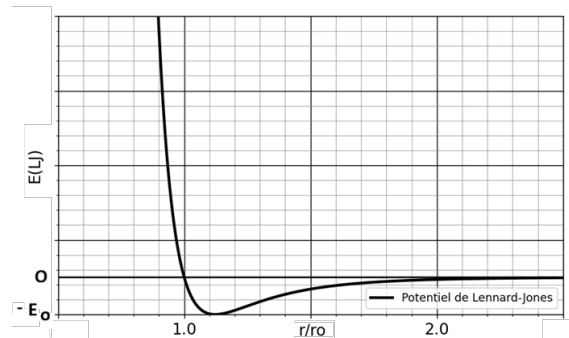
3. Sur le graphique tracé ci contre :
- Si $E_0 < E_M < 0$ le système sera dans un état lié.
 - Si $E_M > 0$ le système sera dans un état de diffusion.

L'énergie de la liaison correspond au travail à fournir pour passer de la position d'équilibre à l'état de diffusion d'énergie la plus basse.

On en déduit que :

$$E_0 = 0 - E_{LJ}(r_0) = -\frac{\alpha}{r_0^{12}} + \frac{\beta}{r_0^6} = -\frac{\alpha}{\left(2 \frac{\alpha}{\beta}\right)^2} + \frac{\beta}{\left(2 \frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

Finalement l'énergie de liaison sera $E_0 = \frac{\beta^2}{4\alpha}$



4. Le travail à fournir est proportionnel au nombre de molécules qui interagissent. Les forces sont à très courte distance, ce qui fait qu'il faut des molécules très proches sur les deux éléments à coller, elles doivent donc être situées sur la surface du ruban et du support. On en déduit que le travail à fournir sera proportionnel à la surface de ruban à décoller.
5. A l'aide d'un dessin, n exprime le déplacement élémentaire demandé : $d\vec{l}_I = dx_L \vec{e}_x + dx_L (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$ ce qui donne $\delta W_p = \vec{F}_p d\vec{l}_I = -F_p dx_L \cos \theta + F_p dx_L$ on obtient finalement $\delta W_p = F_p dx_L (1 - \cos \theta)$.
6. On exploite la donnée fournie $W_{adh} = \gamma A$ pour en déduire que $\delta W_{adh} = \gamma dA = -\gamma b dx_L$

En négligeant les autres forces, et si le système est manipulé de manière quasi-statique, on en déduit par le théorème de l'énergie cinétique $0 = \delta W_p + \delta W_{adh}$ ce qui donne $F_p dx_L (1 - \cos \theta) - \gamma b dx_L = 0$

Finalement on obtient $F_p = \gamma \frac{b}{1 - \cos \theta}$

7. Si l'angle de pelage est constant, on en déduit que $x_L(t) = V_0 t$

Le point I appartenant au ruban présente alors une vitesse $\vec{v}_{I \in \text{ruban}} = V_0 \vec{e}_y$; le point I appartenant au cylindre est animé d'une vitesse $\vec{v}_{I \in \text{cyl}} = r_0 \Omega \vec{e}_y$ si on néglige l'épaisseur du ruban par rapport à r_0 .

Pour que le ruban s'enroule correctement sur le cylindre, il faut que $\vec{v}_{I \in \text{ruban}} = \vec{v}_{I \in \text{cyl}}$ d'où la relation $V_0 = r_0 \Omega$

8. Dans la position proposée $\theta = 0$; $\cos \theta = 1$ et la force à appliquer est exprimée plus simplement sous la forme $F_p \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \gamma b$, en mesurant F_p et en connaissant b , on aura directement accès à γ qui caractérise le pouvoir adhésif du ruban. Elle ne minimise pas la force à appliquer, puisqu'on pourrait envisager un angle $\theta = 180^\circ$.