

Problème 1 : En route pour la planète Mars.

a. Etude préliminaire.

1. On applique le théorème du moment cinétique en O $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ la force est centrale de centre

O, colinéaire au vecteur position d'où $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0}$. Le moment cinétique est donc conservé.

2. A tout instant, le vecteur position doit être perpendiculaire au moment cinétique, on en déduit qu'il évolue dans le plan normal à $\vec{L}_O(M)$ contenant le point O. Ce plan étant défini de manière unique, la trajectoire est plane.

On peut alors étudier le mouvement dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ telle que $\vec{L}_O(M) = mC \vec{e}_z$

3. Dans la base polaire du plan $\vec{OM} = r \vec{e}_r$; $\vec{v}_{M/R} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et $\vec{a}_{M/R} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$

Le moment cinétique s'écrit alors $\vec{L}_O(M) = mC \vec{e}_z = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{M/R} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ d'où $C = r^2 \dot{\theta}$

L'aire élémentaire balayée par le vecteur position \vec{OM} au cours de son mouvement élémentaire $d\vec{OM}$ s'exprime :

$$dA = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt = \frac{C}{2} dt$$

On obtient alors la loi des aires : $dA = \frac{C}{2} dt$ ou encore $A = \frac{C}{2} \Delta T$ L'aire balayée par le rayon Soleil-Planète est proportionnelle à la durée du parcours effectué, autrement dit il balaie des aires égales sur des durées égales.

4. La seule force qui intervient est la force d'attraction gravitationnelle qui est conservative, on en déduit que le système est conservatif. L'énergie potentielle gravitationnelle s'exprime $E_p = \frac{k}{r}$ où $k = -GmM_S$.

5. On écrit l'énergie mécanique : $E_M = E_C + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{r}$

On introduit la constante des aires donnant $E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r} = E_{C,rad} + E_{p,eff}$ avec $E_{p,eff} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r}$

6. Pour la valeur E_A : L'énergie mécanique correspond au minimum de l'énergie potentielle effective, il n'y a qu'une valeur de rayon possible, on se trouve dans le cas d'une trajectoire circulaire.

Pour la valeur E_B : Il existe deux valeurs limites du rayon de la trajectoire, on se trouve dans le cas général de l'état lié, c'est-à-dire dans le cas d'une trajectoire elliptique.

Pour la valeur E_C : on se trouve dans le cas général de l'état de diffusion, la trajectoire est hyperbolique.

b. Mouvement de la Terre et de Mars au tour du Soleil.

7. On applique la 2LN à la Terre sur sa trajectoire circulaire : $\left(\frac{d\vec{p}_{T/R_S}}{dt}\right)_{R_S} = m \vec{a}_{T/R_S} = \vec{F}$

En projection sur \vec{e}_θ : $m d_r \dot{\theta} = 0$, on en conclut que $\dot{\theta}$ est une constante qu'on note ω_T

En projection sur \vec{e}_r : $-m d_r \omega_T^2 = -\frac{m M_S G}{d_r^2}$ d'où $\omega_T = \sqrt{\frac{M_S G}{d_r^3}}$

8. La période T_T est reliée à ω_T par $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = \sqrt{\frac{M_S G}{d_r^3}}$ d'où la troisième loi de Kepler : $\frac{T_T^2}{d_r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

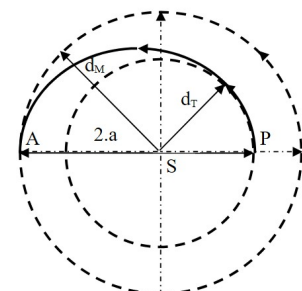
On exprime alors la masse du soleil par : $M_S = \frac{4\pi^2 d_r^3}{GT_T^2}$ A.N : $M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

9. La troisième loi de Kepler donne : $\frac{T_M^2}{d_M^3} = \frac{T_T^2}{d_T^3}$ d'où A.N $T_M = 1,9 \text{ ans}$

c. Voyage vers Mars par une ellipse de Homann.

10. Voir ci contre.

11. La distance entre P et A est : $2a = d_T + d_M$ d'où $a = \frac{d_T + d_M}{2}$



12. La troisième loi de Képler s'énonce pour la trajectoire elliptique étudiée de la même manière que pour

la trajectoire circulaire de la Terre . $\frac{T_e^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \frac{T_T^2}{d_T^3}$ d'où $T_e = T_T \left(\frac{a}{d_T} \right)^{3/2}$

13. Le voyage consistant à parcourir une demi ellipse on a d'après la loi des aires :

$$\Delta T = \frac{T_e}{2} = \frac{T_T}{2} \left(\frac{d_T + d_M}{2d_T} \right)^{3/2} \text{ A.N : } \Delta T = 0,71 \text{ an}$$

14. La vitesse de rotation de Mars autour du soleil est $\frac{2\pi}{T_M}$ d'où $\theta_M(t) = \frac{2\pi}{T_M}t$ de même $\theta_T(t) = \frac{2\pi}{T_T}t$.

15. Pour que la configuration soit favorable à un lancement vers Mars à l'instant t_n depuis la Terre qui a parcouru un angle θ_n , il faut qu'à l'instant $(t_n + \Delta T)$ Mars soit de l'autre côté du soleil soit en position $(\theta_n - (2n+1)\pi)$ le signe - étant là pour tenir compte du fait que Mars accumule du retard par rapport à la Terre au fur et à mesure que le temps s'écoule. Ceci se traduit par : $\theta_M(t_n + \Delta T) = \theta_T(t_n) - (2n+1)\pi$

On obtient $\frac{2\pi}{T_M}(t_n + \Delta T) = \frac{2\pi}{T_T}t_n - (2n+1)\pi$ Et finalement : $t_n = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\Delta T}{T_M} \right)$.

A.N : $t_0 = 1,9 \text{ ans}$ $t_1 = 4,0 \text{ ans}$ $t_{n+1} - t_n = 2,1 \text{ ans}$

16. Pour la configuration de retour il faut qu'à l'instant $t_n' + \Delta T$, la terre soit en avance de $(n+1/2)$ tours sur

Mars soit : $\theta_T(t_n' + \Delta T) = \theta_M(t_n') + (2n+1)\pi$ On obtient alors $t_n' = \frac{T_M T_T}{T_M - T_T} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\Delta T}{T_T} \right)$

A.N : $t_1' = 1,7 \text{ ans}$, $t_2' = 3,8 \text{ ans}$ $t_{n+1}' - t_n' = 2,1 \text{ ans}$

17. En partant à la date t_0 , on arrive sur Mars à la date $t_0 + \Delta T$, et on repart à la date t_2' . Le séjour sur Mars dure alors : $t_2' - (t_0 + \Delta T) = 1,2 \text{ ans}$ pour une expédition de durée totale $t_2' + \Delta T - t_0 = 2,6 \text{ ans}$

18. Les énergies mécaniques s'expriment $E_M(d_T) = -\frac{mM_S G}{2d_T}$; $E_M(d_M) = -\frac{mM_S G}{2d_M}$ $E_M(a) = -\frac{mM_S G}{2a}$

19. On obtient par application du théorème de l'énergie mécanique pour un système non conservatif où les seules forces non conservatives ont pour origine la poussée des moteurs.

- $W_1 = E_M(a) - E_M(d_T) = -\frac{mM_S G}{2} \left(\frac{2}{d_T + d_M} - \frac{1}{d_T} \right) = \frac{mM_S G}{2d_T} \left(\frac{d_M - d_T}{d_T + d_M} \right)$
- $W_2 = E_M(d_M) - E_M(a) = -\frac{mM_S G}{2} \left(\frac{1}{d_M} - \frac{2}{d_T + d_M} \right) = \frac{mM_S G}{2d_M} \left(\frac{d_M - d_T}{d_T + d_M} \right)$

Le travail total est : $W_T = W_1 + W_2 = \frac{mM_S G}{2} \left(\frac{d_M - d_T}{d_T d_M} \right)$ A.N : $|W_T| = 1,6 \cdot 10^8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

d. Temps de transit en employant une voile solaire.

20. L'orbite de départ étant circulaire, l'énergie mécanique du système correspond au minimum de l'énergie potentielle effective. En ajoutant la force purement radiale, et en supposant que l'énergie mécanique du système reste proche de la valeur initiale, on constate qu'on se retrouve encore dans un état lié pour lequel le rayon varie faiblement autour du rayon r_0 de la trajectoire circulaire initiale.

Le rayon semble donc ne pas pouvoir être modifié significativement par l'application d'une force purement radiale de faible intensité.

21. Avec l'approximation indiquée $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{M_S G}{r^3}}$ d'où $\vec{L}_O(M) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m\sqrt{M_S G r(t)} \vec{e}_z$

22. On applique le TMC ce qui donne $\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}(M) \right) = M_{O;\vec{F} \rightarrow M}$ et se traduit $\frac{d}{dt} \left[m(M_S G r)^{1/2} \right] = rF_\theta$

On obtient : $\frac{d}{dt}\left(r^{\frac{1}{2}}\right) = r \frac{F_\theta}{m(M_S G)^{\frac{1}{2}}}$ et $\dot{r} = 2r^{\frac{3}{2}} \frac{F_\theta}{m(M_S G)^{\frac{1}{2}}}$ ce qui est bien la relation donnée.

23. On introduit l'expression fournie pour la force orthoradiale d'où $\frac{dr}{dt} = \left(\frac{2a}{(M_S G)^{\frac{1}{2}}}\right) r^{-\frac{1}{2}}$

24. qu'on intègre par séparation des variables sur l'intervalle de temps ΔT nécessaire au transfert depuis la Terre en orbite sur une trajectoire de rayon d_T à Mars sur une trajectoire de rayon d_M .

$$\int_{R_T}^{R_M} r^{\frac{1}{2}} dr = \int_0^{\Delta T} \left(\frac{2a}{(M_S G)^{\frac{1}{2}}}\right) dt \quad \text{on obtient : } \Delta T = \frac{(M_S G)^{\frac{1}{2}}}{3a} \left[d_M^{\frac{3}{2}} - d_T^{\frac{3}{2}}\right] \quad \text{A.N : } \Delta T = 8,2 \text{ ans}$$

On peut dire que le principe d'utilisation de la voile solaire n'est pas encore au point à ce stade...

Problème 2 : Pilotage d'une platine vinyle.

Première solution de pilotage.

- On étudie la platine en rotation autour de l'axe fixe (Oz), le bilan des actions mécaniques est :
 - Le couple moteur donné dans l'énoncé $C_P(t)$.
 - L'action de la liaison pivot présentant un frottement fluide de de moment $C_f = -\mu\Omega$ et un frottement solide de couple $-C_S$ (si la platine tourne dans le sens trigonométrique).
 - L'action de gravité présente un moment nul par rapport à l'axe (Oz) car la platine est équilibrée.
- On applique le TMC à la platine par rapport à l'axe de rotation (Oz) $\frac{dL_{z,Oz}}{dt} = J \frac{d\Omega}{dt} = C_P(t) - \mu\Omega - C_S$

d'où $J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \Omega = \frac{1}{\tau} \Omega_\infty$ avec $\tau = \frac{J}{\mu}$ et $\Omega_\infty = \frac{C_P - C_S}{\mu}$

3. La vitesse de rotation initiale est $\Omega(0) = 0$.

La solution de l'équation s'écrit sous la forme

$$S_G(t) = S_H(t) + S_P = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \Omega_\infty$$

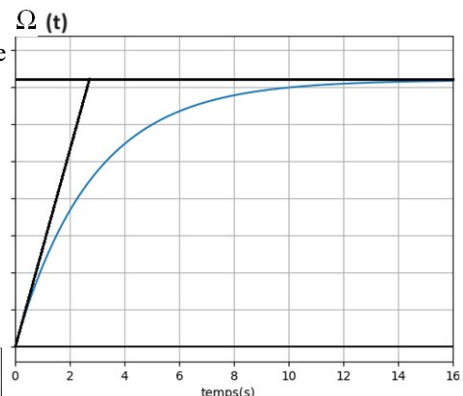
On applique la condition initiale $\Omega(t) = \Omega_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

4. La conversion s'écrit $\Omega_\infty = N_{nom} \frac{2\pi}{60} = \frac{C_{nom} - C_S}{\mu}$

On obtient $C_{nom} = C_S + \mu N_{nom} \frac{2\pi}{60}$ A.N : $C_{nom} = 4,7 \cdot 10^{-1} \text{ N.m}$

5. On cherche $t_{5\%}$ tel que $\Omega(t_{5\%}) = 0,95\Omega_\infty = \Omega_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right)\right]$

d'où $0,05 = \exp\left(-\frac{t_{5\%}}{\tau}\right)$ Finalement on obtient $t_{5\%} = \tau \ln(20) \approx 3\tau$ A.N : $t_{5\%} = 15 \text{ s}$



Cette solution de pilotage ne correspond pas à un temps de réponse conforme au cahier des charges.

Seconde solution de pilotage.

6. En reprenant l'expression démontré en q3, on obtient sur $t \in [0, t_{dem} = 2 \text{ s}]$

$$\Omega(t) = \frac{C_{dem} - C_S}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \text{ puis } \Omega_{dem} = \frac{C_{dem} - C_S}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t_{dem}}{\tau}\right)\right] \text{ A.N } \Omega_{dem} = 3,6 \text{ rad.s}^{-1} = 35 \text{ tours / min}$$

La vitesse de rotation atteinte dépasse la consigne de 6%, le cahier des charges demande donc que la vitesse diminue pour atteindre la vitesse de consigne sur la seconde phase de pilotage.

7. Sur l'intervalle considéré on retrouve l'équation différentielle de la q2.

Alors $S_G(t) = S_H(t) + S_P = A' \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \Omega_\infty$ avec la condition initiale $S_G(t_{dem}) = \Omega_{dem} = A' \exp\left(-\frac{t-t_{dem}}{\tau}\right) + \Omega_\infty$

Finalement $\Omega(t) = \Omega_\infty + (\Omega_{dem} - \Omega_\infty) \exp\left(-\frac{t-t_{dem}}{\tau}\right)$

On reprend le calcul de la q5 pour obtenir $\Omega(t_{5\%}) = 1,05\Omega_\infty = \Omega_\infty + (\Omega_{dem} - \Omega_\infty) \exp\left(-\frac{t_{5\%} - t_{dem}}{\tau}\right)$

Ce qui donne $t_{5\%} = t_{dem} + \tau \ln \left(20 \left(\frac{\Omega_{dem}}{\Omega_p} - 1 \right) \right)$ l'A.N donne $t_{5\%} = 7,5s$, le cahier des charges est bien validé avec cette seconde solution de pilotage.

Contrôle de la vitesse de rotation.

- Par l'éclairage stroboscopique, on éclaire la platine à intervalle de temps régulier donné par la fréquence de 60Hz par un flash lumineux donnant la position instantanée de celle-ci. En plaçant des points métalliques à intervalle régulier sur le bord de la platine, on peut s'arranger pour qu'ils apparaissent comme immobiles sous l'éclairage stroboscopique lorsque la vitesse de consigne est atteinte. On contrôle ainsi le respect de la vitesse de consigne.
- Pour que les points métalliques apparaissent fixes, il faut les placer régulièrement avec un écart angulaire donné par l'angle parcouru par la platine entre deux flashes lorsque le disque tourne à la vitesse de consigne. Cet angle s'exprime $\theta = N_{nom} * \frac{2\pi}{60} * \frac{1}{f_{strob}}$

Le nombre de points métalliques à disposer est alors $N_{metal} = \frac{2\pi}{\theta} = \frac{60 f_{strob}}{N_{nom}}$ A.N $N_{metal} = 109$.

Pilotage du moteur pendant la lecture.

- En 30 minutes, à raison de 33 tours par minutes, on obtient $n_{tot} = 990 \text{ tours}$
- L'angle θ_{max} est celui atteint après les n_{tot} tours d'où $\theta_{max} = 2\pi n_{tot} = 6,2 \cdot 10^3 \text{ rad}$.
- Avec la description faite : $R_{max} = R(0) = b$ et $R_{min} = R(\theta_{max}) = -a\theta_{max} + b$

On obtient $b = R_{max}$ $a = \frac{R_{max} - R_{min}}{\theta_{max}}$ Le pas est l'écart de rayon entre deux sillons successifs c'est-à-dire la variation de rayon sur un tour d'ouverture angulaire 2π d'où $h = 2\pi \cdot a = 76 \mu m$

- Cette force de frottement est exprimée à l'aide des lois de Coulomb $F_p = f_d P_{tete}$, il s'oppose à la mise en rotation du disque, cette force est donc orientée selon $\vec{u} = -\vec{y}_b$ d'où $\vec{F}_p = -f_d P_{tete} \vec{y}_b$

- On applique le TMC au plateau, avec les mêmes actions mécaniques que dans la partie précédente et en y ajoutant l'action mécanique de la tête de lecture qui applique un moment par rapport à (Oz) sous la forme $M_p = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_p) \cdot \vec{e}_z = -R(\theta_p) F_p$

On obtient alors $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J \frac{d^2\theta_p}{dt^2} = C_p - \mu \frac{d\theta_p}{dt} - C_s - R(\theta_p) F_p$ et en remplaçant $R(\theta_p) = -a\theta_p + R_{ext}$

On obtient bien $J \frac{d^2\theta_p}{dt^2} + \mu \frac{d\theta_p}{dt} - F_p a \theta_p = C_p - C_s - R_{ext} F_p$

- On écrit le polynôme caractéristique de l'équation différentielle étudiée $Jx^2 + \mu x - \frac{F_p}{2\pi} a$

Le discriminant s'écrit $\Delta = \mu^2 + 4JF_p a$, on observe qu'il est toujours positif et qu'il présente donc deux racines positives $r_{\pm} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\Delta}}{2J}$. La solution générale s'écrit alors $S_H(t) = A \exp(-r_+ t) + B \exp(-r_- t)$

- Le second membre est constant on trouve la solution particulière $S_p = \frac{C_p - C_s - R_{ext} F_p}{F_p a}$

- La solution générale de l'équation s'écrit alors $S_G(t) = S_H(t) + S_p$.

- On observe que la fréquence de rotation est quasiment constante mais augmente légèrement sur l'intervalle de lecture $t \in [1, 30] \text{ min}$. On peut expliquer cette observation par la diminution du moment de frottement appliquée par la tête de lecture, de force constante mais de bras de levier passant de R_{ext} à R_{int} .

- Sur cet intervalle, la vitesse de rotation passe de 32,8 à 33,1 tours par minutes ce qui correspond à un écart par rapport à la vitesse de consigne allant de -0,6% à +0,3% nettement inférieur à l'écart maximal de 2% figurant dans le cahier des charges. Il est donc inutile d'envisager d'asservir la vitesse de rotation du disque si celle-ci a été bien réglée dès le départ.