

Problème 1 : En route pour la planète Mars.

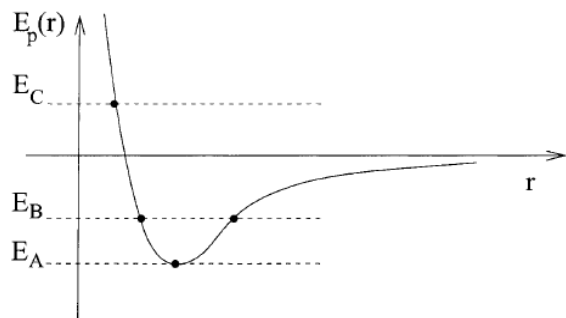
a) Etude préliminaire.

On considère un astre M de masse m, se déplaçant dans le référentiel héliocentrique R_S d'origine O le centre du Soleil sous la seule influence de l'attraction gravitationnelle exercée par ce dernier.

On donne la valeur de la constante de gravitation universelle $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{SI}$.

1. Etablir la conservation du moment cinétique du point M en O dans le référentiel héliocentrique.
2. En déduire la planéité du mouvement et introduire une base cylindro-polaire adaptée à l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil. Exprimer le moment cinétique dans cette base en faisant apparaître la constance des aires C.
3. Faire l'étude cinématique (position, vitesse et accélération) du mouvement de M dans le plan du mouvement puis établir la loi des aires.
4. Montrer que le système est conservatif et exprimer l'énergie potentielle. On introduira une constante k à exprimer en fonction de G, m et M_S .
5. Exprimer l'énergie mécanique et faire apparaître une énergie potentielle effective en référence au seul mouvement radial.

L'énergie potentielle effective est représentée sur la figure ci-contre.



6. Décrire qualitativement, la nature des trajectoires suivies par des corps dont les énergies mécaniques totales seraient respectivement égales à E_A , E_B et E_C schématisées par des lignes horizontales sur la figure.

b) Mouvement de la Terre et de Mars au tour du Soleil.

On considère la terre de centre T de masse $M_T=6,0 \cdot 10^{24} \text{kg}$, se déplaçant sur une trajectoire circulaire autour du soleil de rayon $d_T=1,5 \cdot 10^{11} \text{m}$, présentant une période de révolution autour du soleil de $T_T=365,25$ jours.

7. Montrer que le mouvement circulaire de la Terre autour du soleil est uniforme et exprimer la vitesse angulaire ω_T en fonction de M_S , G et d_T .
8. Etablir la troisième loi de Kepler pour une trajectoire circulaire puis exprimer M_S la masse du soleil en fonction de d_T , T_T et G. En déduire la valeur numérique de M_S .
9. On considère alors Mars de masse $M_M=6,4 \cdot 10^{23} \text{kg}$, sur une trajectoire circulaire autour du soleil de rayon $d_M=2,3 \cdot 10^{11} \text{m}$. Exprimer la période de révolution T_M de Mars autour du soleil en fonction de d_M , T_T et d_T . Faire l'A.N. en années terrestre.

c) Voyage vers Mars par une ellipse de Homann.

Le voyage de la Terre à Mars le plus économique (en énergie) se fait selon une ellipse de Homann, tangente à la trajectoire de la Terre à son périhélie noté P et tangente à la trajectoire de Mars à son aphélie noté A.

10. Dessiner sur un même graphique les trajectoires de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique puis l'ellipse de transfert de Homann. (On fera le schéma pour que le périhélie de l'ellipse soit dans la direction $\theta = 0$ horizontale vers la droite).
11. Déterminer le demi grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de d_T et d_M .
12. A partir de la troisième loi de Kepler pour une trajectoire elliptique exprimer T_e la période d'un astre parcourant cette ellipse en fonction de a le demi grand axe de cette ellipse de T_T et de d_T .
13. Exprimer la durée ΔT du voyage le long de la trajectoire de transfert en fonction de T_T , d_T , et d_M . Faire l'A.N, on exprimera le résultat en année terrestre.

A l'instant $t=0$, on suppose que le Soleil, la Terre et Mars sont alignés dans cet ordre dans la direction $\theta=0$.

14. Exprimer la position angulaire θ_M de Mars en fonction de t et T_M et la position angulaire de la Terre en fonction de t et T_T .
15. Montrer que les dates t_n propices au lancement du vaisseau depuis la Terre vers Mars vérifient $\theta_M(t_n + \Delta T) = \theta_T(t_n) - (2n+1)\pi$. Exprimer alors t_n en fonction de T_M , ΔT , T_T et n. Faire l'application numérique pour t_0 , t_1 et $(t_{n+1}-t_n)$.

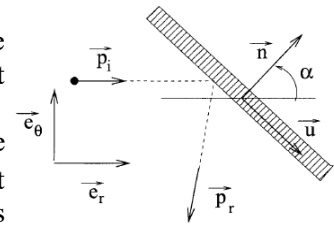
On envisage maintenant le retour depuis Mars vers la Terre.

16. Exprimer les dates t_n' propices au retour du vaisseau sur la Terre en fonction de T_M , ΔT , T_T et n . Faire l'application numérique pour t_1' , t_2' et pour $(t_{n+1}' - t_n')$.
17. Déterminer la durée minimale du séjour à envisager sur Mars et la durée totale de l'expédition. Faire l'application numérique.
18. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(d_T)$ d'un point matériel de masse m sur la même trajectoire que la Terre autour du Soleil en fonction de m , $M_S G$ et d_T puis $E_M(d_M)$ celle du point matériel sur la même trajectoire que Mars en fonction de m , $M_S G$ et d_M et enfin $E_M(a)$ celle d'un point matériel de masse m sur la trajectoire elliptique de Homann en fonction de m , $M_S G$ et a .
19. Déterminer W_1 le travail de poussée des moteurs de la fusée pour quitter l'orbite terrestre puis W_2 le travail de poussée des moteurs pour rejoindre l'orbite de Mars puis le travail total W_T . Estimer numériquement l'énergie massique (c'est-à-dire pour un kg) nécessaire pour le voyage allé.

d) Temps de transit en employant une voile solaire.

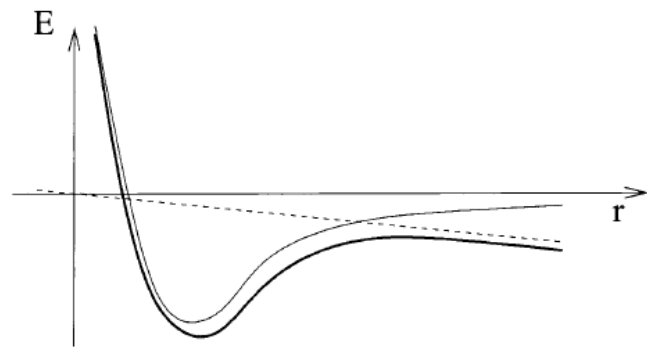
Une voile solaire, supposée légère, est assimilée à une surface plane d'aire S , pourvue d'un revêtement réfléchissant, dont la fonction est de tirer profit de la pression de radiation associée au rayonnement lumineux du Soleil.

Un photon de quantité de mouvement $\vec{p}_i = p \cdot \vec{e}_r$ subit une collision dite élastique sur la surface de la voile et repart avec une quantité de mouvement \vec{p}_r de même norme que \vec{p}_i mais selon une direction et un sens qui respecte les lois de Snell-Descartes de la réflexion.



En choisissant l'orientation de la voile solaire, on peut induire une force supplémentaire qui s'exerce sur l'engin spatial et dont on peut choisir l'orientation en réglant l'orientation de la voile.

On considère tout d'abord, un corps suivant une trajectoire circulaire de rayon r_0 dans le champ de force purement gravitationnel. L'énergie potentielle effective est alors donnée par la courbe en trait fin de la figure ci-contre. On suppose maintenant qu'une force purement radiale de faible intensité est appliquée à ce corps, l'énergie potentielle associée à cette force est représentée par la courbe en pointillée, l'énergie potentielle totale du point matériel est alors donnée par la courbe en trait gras.



20. En vous appuyant sur la courbe d'énergie potentielle effective, justifier qu'une force purement radiale et de faible intensité ne permet pas de modifier significativement le rayon de l'orbite héliocentrique circulaire.

On suppose maintenant que le corps est soumis à la force gravitationnelle et à une force purement orthoradiale $\vec{F}_{sup} = F_\theta \vec{e}_\theta$.

On suppose alors que la trajectoire reste proche d'une orbite circulaire (il s'agit en fait d'une spirale dont le rayon évolue lentement au cours du temps) et que l'expression de la vitesse de rotation reste identique à celle obtenue pour une trajectoire purement circulaire.

21. Exprimer la vitesse de rotation $\theta(t)$ du véhicule en fonction de $M_S G$ et de $r(t)$ sur l'orbite quasiment circulaire. En déduire l'expression de $\vec{L}_O(M)$ en fonction de m, M_S, G et $r(t)$.
22. A partir du théorème du moment cinétique, montrer que $\dot{r}(t) = \left(\frac{2F_\theta}{m\sqrt{M_S G}} \right) r^{3/2}$.

Pour une voile solaire, la force orthoradiale s'exprime $\vec{F}_{sup} = \frac{ma}{r^2} \vec{e}_\theta$ avec $a = 7,78 \cdot 10^{17} \text{N} \cdot \text{m}^2$.

23. En déduire l'équation différentielle vérifiée par r .
24. Intégrer alors cette équation pour exprimer la durée ΔT du voyage de l'orbite terrestre jusqu'à l'orbite de Mars. Faire l'application numérique et commenter.

Problème 2 : Pilotage d'une platine vinyle.

L'objectif de ce problème est de piloter le moteur d'une platine vinyle afin de respecter le cahier des charges suivant :

- Le temps de réponse à 5% de la platine $t_{5\%}$ doit rester inférieur à 8s.
- La variation δN de la vitesse de rotation autour de la valeur de consigne $N_{nom}=33\text{tours}\cdot\text{min}^{-1}$ doit rester inférieure à 2%.



On suppose que la platine présente un moment d'inertie $J=0,1\text{kg}\cdot\text{m}^2$ par rapport à l'axe (Oz) vertical autour duquel elle tourne, grâce à une liaison pivot, à la vitesse angulaire notée $\Omega(t)$ dans toute la suite du problème. On suppose également que la platine est équilibrée par rapport à cet axe de rotation.

Au niveau de la liaison pivot, on tiendra compte d'un couple de frottement fluide $C_f=-\mu\Omega$ où le coefficient de frottement prend la valeur $\mu=2\cdot 10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}\cdot\text{s}$ et d'un couple de frottement solide de valeur absolue $C_s=0,4\text{N}\cdot\text{m}$.

Première solution de pilotage.

Afin de mettre en rotation la platine, un moteur applique un échelon de couple $C_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ C_o & \text{si } t > 0 \end{cases}$ dans

le but d'atteindre la vitesse de rotation nominale Ω_{nom} lorsque le régime est établi. La pointe de la tête de lecture est « en l'air » et ne touche pas le disque.

1. Faire le bilan des actions mécaniques sur la platine.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de rotation sur l'intervalle $t \in [0; +\infty[$ et faire apparaître un temps caractéristique τ . Préciser également Ω_∞ la vitesse atteinte en régime stationnaire.
3. Indiquer la condition initiale vérifiée par la vitesse de rotation puis déterminer l'expression de la vitesse $\Omega(t)$. Faire une représentation graphique.
4. Exprimer Ω_∞ en fonction de N_{nom} et en déduire l'expression de C_{nom} permettant d'atteindre la vitesse de consigne. Faire l'application numérique.
5. Déterminer l'instant $t_{5\%}$ à partir duquel la vitesse de rotation reste égale à la vitesse de consigne à 5% près et faire l'application numérique. Commenter.

Seconde solution de pilotage.

Afin d'améliorer le temps de réponse, on se propose d'imposer un couple $C_{dem}=0,62\text{N}\cdot\text{m}$ pendant une durée t_{dem} égale à deux secondes puis de revenir à la valeur C_{nom} déterminée précédemment.

6. En vous appuyant sur les résultats de la partie A, et en les adaptant, déterminer l'expression de $\Omega(t)$ sur l'intervalle $t \in [0, t_{dem} = 2\text{s}]$. En déduire l'expression de la vitesse de rotation Ω_{dem} atteinte à la fin de cette phase et faire l'application numérique.
7. Déterminer l'expression de la vitesse de rotation $\Omega(t)$ sur l'intervalle $t \in [t_{dem} = 2\text{s}, +\infty[$ en fonction de Ω_{dem} , Ω_∞ , t_{dem} et τ . En déduire l'expression du temps de réponse à 5% dans cette nouvelle configuration. Faire l'application numérique et commenter.

Contrôle de la vitesse de rotation.

Un système de stroboscope à fréquence fixe égale à $f_{str}=60\text{Hz}$ éclaire un bandeau sur lequel des points métalliques sur fond noir sont disposés régulièrement sur le pourtour de la platine.

8. Rappeler le principe du fonctionnement d'un éclairage stroboscopique et expliquer comment il permet de contrôler le respect de la vitesse de consigne $N_{nom}=33\text{tours}$.
9. Exprimer et évaluer numériquement le nombre de points métalliques qu'il faut disposer sur le pourtour de la platine pour mettre en œuvre le contrôle par stroboscopie de la vitesse de rotation et l'évaluer pour les disques en 33 tours/min.



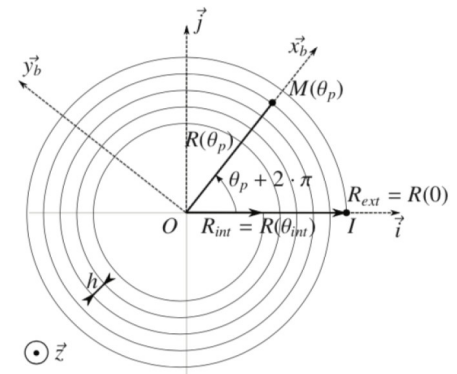
Pilotage du moteur pendant la lecture.

La lecture commence pour une durée de 30 minutes dans le cas du disque vinyle étudié, la pointe de la tête de lecture est alors posée sur le disque, elle suit le microsillon gravé sur le disque en forme de spirale d'Archimède.

10. Evaluer le nombre n_{tot} de tours effectués par le disque durant la lecture.

La spirale d'Archimède conduit à une équation polaire de la forme $R(\theta_p) = -a\theta_p + b$ selon la configuration montrée sur la figure ci-contre où la distance entre deux sillons a été volontairement augmentée afin d'améliorer la visibilité.

Lorsqu'on pose la tête de lecture sur le disque à l'instant $t=0$, on définit le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) lié au disque, où O est le centre du disque et I le point de contact de la tête, tel que $\vec{OI} = R_{ext} \vec{i}$. Le repère $R_b(O, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z})$ est associé au bâti. Ainsi, selon ce modèle, tout se passe comme si la tête de lecture tournait autour du disque immobile.



Le rayon extérieur du disque est $R_{ext}=150\text{mm}$, le rayon intérieur est $R_{int}=75\text{mm}$. On prend comme conditions initiales $\theta_p(t=0)=0$; $R(t=0)=R_{ext}$.

11. Exprimer et évaluer numériquement θ_{max} (en radian) tel que $R(\theta_{max})=R_{int}$.

12. Exprimer a et b en fonction de R_{ext} , R_{int} et θ_{max} . Exprimer et évaluer numériquement le pas h de la spirale d'Archimède, c'est-à-dire la distance entre deux sillons successifs.

La composante verticale de l'action mécanique de la tête sur le disque est appelée P_{tete} , elle est réglée à l'aide d'un contrepoids placé sur le bras de manière à ce que $P_{tete}=3.0.10^{-2}\text{N}$. Le coefficient de frottement entre le vinyle et le diamant est noté $f_d=0,3$. Ainsi la pointe exerce une force de composante horizontale \vec{F}_p , liée aux frottements au niveau du point de contact avec le vinyle. On fera l'hypothèse que cette force est perpendiculaire au rayon \vec{OM} .

13. Déterminer l'expression littérale de la force $\vec{F}_p = F_p \vec{u}$ en fonction de f_d , P_{tete} et préciser la direction et le sens du vecteur unitaire \vec{u} .

On considère d'abord que le couple moteur $C_p(t)$ est constant tout au long de la lecture de la piste, comme dans les parties précédentes. On prend comme conditions initiales une position angulaire nulle $\theta_p(t)=0$ et une vitesse angulaire nulle $\omega_p(t)=0$.

14. Appliquer le théorème du moment cinétique au plateau sur l'ensemble du mouvement et montrer

$$\text{l'angle } \theta_p(t) \text{ vérifie l'équation différentielle } J \frac{d^2\theta_p}{dt^2} + \mu \frac{d\theta_p}{dt} - F_p a \theta_p = C_p - C_s - R_{ext} F_p$$

15. Etablir l'expression de $S_H(t)$ la solution générale de l'équation homogène.

On introduira $\Delta = \mu^2 + 4JF_p a$.

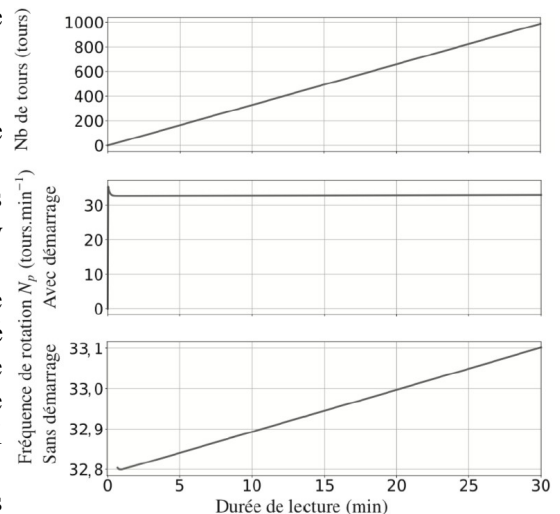
16. Donner l'expression de S_p la solution particulière de l'équation complète.

17. Donner la solution générale de l'équation sans chercher à déterminer les constantes qui y apparaissent.

La résolution complète du problème nécessiterait de prendre en compte la variation du couple moteur C_p étudié dans la seconde solution de pilotage. Afin d'éviter de surcharger les calculs, cette résolution a été réalisée à l'aide d'un calcul numérique dont les résultats sont présentés ci contre.

18. Expliquer la tendance de la courbe (sans démarrage) de la fréquence de rotation sur l'intervalle de temps $t \in [1, 30] \text{min}$

19. Montrer que sur l'intervalle de temps considéré précédemment, on peut considérer que $\omega_p(t)$ respecte le cahier des charges. Conclure quant à la nécessité d'asservir la vitesse de rotation du disque si celle-ci a été bien réglée dès le départ.



Résolution de problème 1 : Rayon de Schwarzschild.

En appliquant un modèle de mécanique classique, on peut voir un trou noir comme étant un astre dont les caractéristiques (rayon et masse) implique une vitesse de libération supérieure à c la vitesse de la lumière. Le rayon de Schwarzschild est la valeur maximale du rayon d'un astre pour qu'il devienne un trou noir.

1. Etablir l'expression et la valeur numérique du rayon de Schwarzschild pour un astre présentant la même masse que la Terre. Commenter.

On donne pour la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Résolution de problème 2 : Mise en rotation d'un oeuf.

On considère l'œuf dur présenté sur la photo ci-contre.

Comme le montre la vidéo que vous pourrez trouver sur wikipédia à l'adresse suivante, lorsque l'œuf tourne avec une grande vitesse de rotation, il adopte une position où son grand axe est vertical.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Rotation_de_l%27%C5%93uf_dur

On donne le moment d'inertie d'un cylindre de masse m de rayon R et de hauteur h

tournant autour de son axe de symétrie $J = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right)$

1. Expliquer le phénomène observé et évaluer la vitesse de rotation minimale pour que l'œuf se redresse lors de la rotation.
2. Expliquer pourquoi l'expérience n'est pas réalisable si l'œuf n'est pas cuit jusqu'à être entièrement dur.

