

## Champ magnétique.

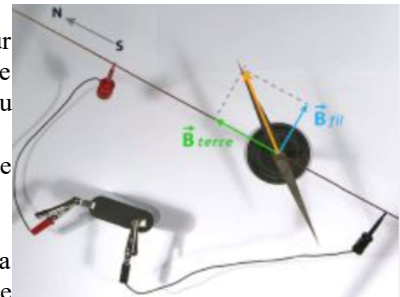
### 1. Une source de champ magnétique au niveau macroscopique : le courant électrique.

#### 1.1. Champ magnétique généré par un fil rectiligne.

##### a. Mise en évidence par l'expérience d'Oersted (1820).

Le champ magnétique généré par un fil rectiligne est mis en évidence pour la première fois lors de l'expérience d'Oersted en 1820. Une aiguille de boussole est un aimant dont l'orientation indique la direction et le sens du champ magnétique local. Lors de l'expérience :

- Lorsqu'il n'y a pas de courant électrique dans le fil, la boussole s'aligne sur le champ magnétique terrestre.
- On place alors au-dessus de la boussole un fil conducteur.
- Lorsqu'on fait passer un courant dans ce fil, on voit l'aiguille de la boussole déviée dans le sens indiqué sur l'image ci-contre lorsque le courant va de « gauche à droite » dans le fil.
- Si on inverse le sens du courant dans le fil, on voit dévier l'aiguille dans l'autre sens.
- L'angle de déviation de l'aiguille augmente lorsque l'intensité du courant électrique dans le fil augmente.



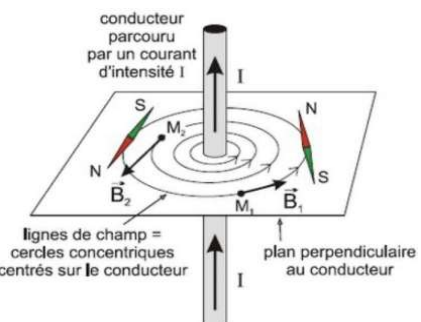
##### b. Champ magnétique généré par un fil rectiligne.

Lorsqu'on se place dans l'environnement proche d'un fil rectiligne, on peut l'assimiler à un fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I$  orienté dans la direction et le sens de l'axe ( $Oz$ ) confondu avec le fil.

On montre dans ce cas, que dans la base cylindro-polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , le

champ magnétique généré s'exprime  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  dans l'espace entourant

le fil.



##### c. Cartographie du champ magnétique.

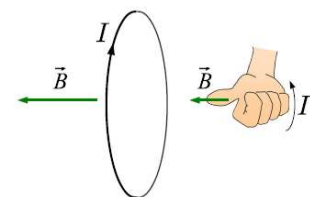
**Définition :** les lignes de champ magnétique sont les courbes obtenues en suivant en tout point la direction et le sens du champ magnétique. En représentant plusieurs de ces lignes de champ, on peut alors représenter une carte du champ magnétique généré par le système.

- Les lignes de champ magnétique autour du fil infini sont des cercles.
- Sur la carte du champ magnétique autour du fil, on constate que les lignes s'enroulent autour du fil dans lequel passe le courant, en suivant la règle d'Ampère : lorsqu'on place le pouce de la main droite dans la direction et le sens du courant, les lignes de champs s'enroulent dans la paume de la main en sortant par le bout des doigts.

#### 1.2. Champ magnétique généré par une spire de courant.

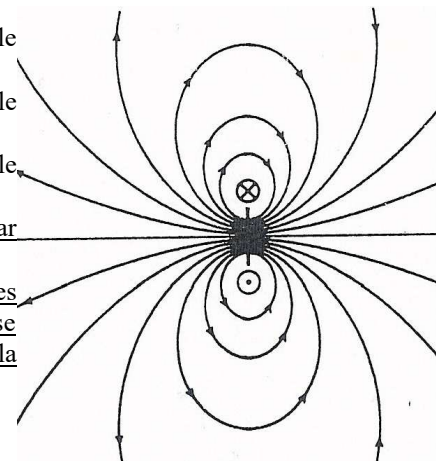
On étudie maintenant le champ créé par une spire de courant c'est-à-dire un circuit électrique contenu dans un plan et bouclé sur lui-même dans lequel passe un courant électrique d'intensité  $I$ .

- Dans cette situation on observe que le champ magnétique dans le plan de la spire est orienté dans la direction normale au plan contenant la spire et que son sens est donné par la règle d'ampère illustrée ici à droite.



La carte de champ magnétique dans un plan contenant la droite normale à la spire est alors donnée sur la figure ci contre :

- La croix est le point d'intersection du plan avec la spire avec le courant pointant « vers le fond ».
- Le point est le point d'intersection du plan avec la spire avec le courant pointant « vers l'observateur ».
- On observe qu'à nouveau que l'orientation des lignes de champs par rapport au courant électrique est donnée par la règle de d'Ampère.
- Sur la carte de champ, les lignes se rapprochent les unes des autres dans la zone proche de la source où le champ magnétique est intense et s'éloignent les unes des autres dans les zones éloignées de la source où le champ magnétique est plus faible.

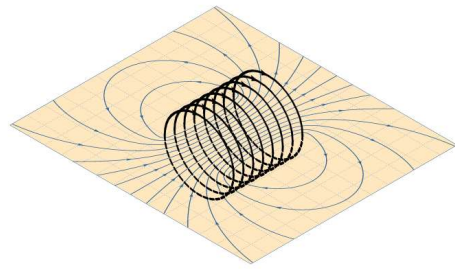


### 1.3. Champ magnétique généré par une bobine longue (appelé aussi solénoïde long). Création d'un champ uniforme.

On appelle bobine, ou solénoïde, un enroulement de spires métalliques conductrices du courant électrique le long d'un cylindre droit dont la section peut être de forme quelconque.

Dans le cas général, la carte de champ associée présente l'allure ci-contre, amenant aux observations suivantes :

- Les lignes de champs se resserrent à l'intérieur de la bobine où elles tendent à construire un ensemble de lignes parallèles équidistantes.
- Les lignes de champs sont beaucoup plus espacées et le champ magnétique est donc beaucoup moins intense à l'extérieur.

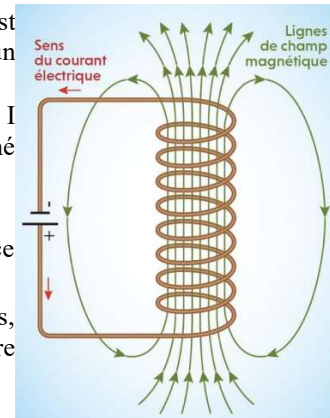


On introduit un modèle simplifié en considérant que la longueur du solénoïde est suffisamment grande devant ses dimensions transverses pour l'assimiler à un solénoïde de longueur infinie.

- Le champ généré à l'intérieur d'un solénoïde infini parcouru par un courant  $I$  présentant  $N$  spires enroulées sur chaque longueur  $L$  est uniforme et exprimé par la relation  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{L} I \vec{u}_L$ . Il est nul à l'extérieur.

$\vec{u}_L$  est le vecteur unitaire donnant la direction de l'axe du solénoïde et orienté grâce à la règle d'Ampère.

- Les lignes de champ à l'intérieur du solénoïde sont alors rectilignes, uniformément espacées et orientées dans le sens donné par la règle d'Ampère donnant la carte ci-contre.



### 1.4. Symétries et invariances des distributions de courant.

Le principe de Curie est un principe général de la physique. Il s'énonce de la manière suivante :

- Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.
- Attention la réciproque est fautive, les effets peuvent présenter des symétries que les causes n'ont pas.

Dans l'étude des champs magnétiques, Les éléments de symétrie de la distribution de courant se retrouveront dans les éléments de symétrie du champ magnétostatique qu'elle génère.

#### a. Invariance de la distribution de courant.

**Propriété :** Si une distribution de courant est invariante par translation le long d'un axe alors le champ magnétique qu'elle génère sera également invariant par cette même translation.

**Exemple 1 :** On considère un fil rectiligne de longueur infini le long de l'axe  $Oz$  présentant un courant d'intensité  $I$ . La distribution est invariante par translation le long de l'axe  $Oz$ , alors le champ sera invariant par translation le long de l'axe ( $Oz$ ) de l'axe et on en déduit que  $\|\vec{B}_{fil}(P)\| = f(r, \theta)$

**Exemple 2:** On considère le cas du solénoïde long parcouru par un courant  $I$ . La distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe ( $Oz$ ), alors le champ magnétique généré sera invariant par translation le long de l'axe ( $Oz$ ), on en déduit que  $\|\vec{B}_{bob}(P)\| = F(r, \theta)$ .

**Propriété :** Si une distribution de courant est invariante par rotation autour d'un axe alors le champ magnétique qu'elle génère sera également invariant par cette même rotation.

**Exemple 1 :** On considère à nouveau le fil rectiligne précédent. La distribution est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$  :  $\|\vec{B}_{fil}(P)\| = f(r)$  la norme du champ magnétique ne dépend donc que de  $r$  la distance au fil infini.

**Exemple 2:** On considère à nouveau le solénoïde précédent. La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), alors le champ magnétique sera invariant par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), on en déduit que  $\|\vec{B}_{bob}(P)\| = F(r)$ .

#### b. Symétrie de la distribution de courant.

##### Définition des symétries de la distribution.

$P$  est un plan de symétrie de la distribution de courants si, pour tous les couples de points  $M$  et  $M'$  symétriques par réflexion sur  $P$ , les vecteurs courant sont symétriques.

**Exemple 1 :** On considère à nouveau le fil rectiligne précédent. La distribution est symétrique pour tout plan contenant l'axe (Oz).

**Exemple 2:** On considère à nouveau le cas du solénoïde long. La distribution est antisymétrique pour tout plan contenant l'axe (Oz).

P' est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges si, pour tous les couples de points M et M' symétriques par réflexion sur P', les vecteurs densité de courant sont antisymétriques

**Exemple 1 :** On considère à nouveau le fil rectiligne précédent. La distribution est antisymétrique pour tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz).

**Exemple 2:** On considère à nouveau le cas du solénoïde long. La distribution est symétrique pour tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz).

**Propriétés du champ magnétostatique.**

Si A est un point appartenant à un plan de symétrie P de la distribution de courants alors le champ magnétostatique en A est un vecteur perpendiculaire au plan P.

Si B est un point appartenant à un plan d'antisymétrie P' de la distribution de courants alors le champ magnétostatique en B est un vecteur appartenant au plan P'.

**Exemple 1 :** On considère à nouveau le fil rectiligne. Soit P un point de l'espace. Le plan  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de courant alors le champ magnétostatique est orthoradial  $\vec{B}_{fil}(P) = f(r) \vec{e}_\theta$

**Exemple 2:** On considère à nouveau le cas du solénoïde long. La distribution est symétrique pour tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) alors le champ magnétique est orienté selon l'axe du solénoïde  $\vec{B}_{bob}(P) = F(r) \vec{e}_z$

**1.5. Résumé des propriétés du champ magnétique et des cartes de champ.**

On peut généraliser les observations faites sur les exemples précédents :

- Sur une carte de champ magnétique, les lignes de champ magnétique s'enroulent autour du fil dans lequel passe le courant source en suivant la règle d'Ampère.
- Sur une carte de champ magnétique, l'intensité du champ magnétostatique évolue en fonction de la position relative des lignes de champ.
  - ❖ Si il est uniforme, les lignes de champs sont parallèles et équidistantes.
  - ❖ Si il n'est pas uniforme, il est d'autant plus intense que les lignes de champs se resserrent.
- la carte de lignes de champ magnétique reproduit les symétries et invariances du champ magnétique.
- Le champ magnétique généré est toujours proportionnel à l'intensité du courant électrique dans le circuit électrique.

**2. Une source de champ magnétique au niveau microscopique : le moment dipolaire magnétique.**

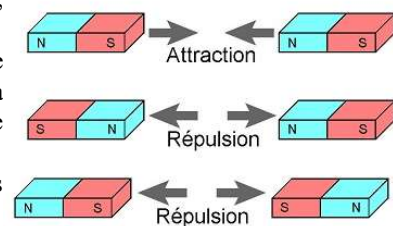
**2.1. Introduction des milieux ferromagnétiques et des aimants.**

On peut classer les matériaux en trois grandes catégories, diamagnétique, paramagnétique et ferromagnétique.

Pour les milieux ferromagnétiques, les propriétés magnétiques se manifestent à notre échelle. Les éléments suivants entrent dans la composition de ces matériaux : Fer, Cobalt, Nickel. Ils permettent de réaliser des aimants qui sont également source de champs magnétiques.

Tout aimant possède un pôle nord et un pôle sud magnétique. Les interactions entre deux aimants obéissent à la loi suivante :

- deux pôles de même nature se repoussent
- deux pôles de nature distincte s'attirent



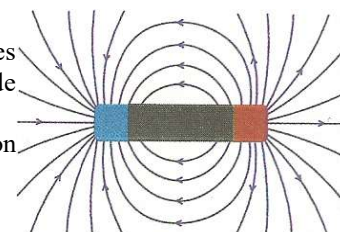
**2.2. Champ magnétique généré par un aimant.**

On appelle pôle nord le pôle par lequel émergent les lignes de champ magnétique généré par l'aimant. Les lignes de champ magnétique sont donc toujours orientées du pôle nord vers le pôle sud.

Pour un aimant droit, la carte de champ est ci contre.

L'aimant présente un pôle Nord (à droite) et un pôle Sud (à gauche). Les lignes de champ magnétostatiques partent du pôle Nord pour rejoindre le pôle Sud de l'aimant.

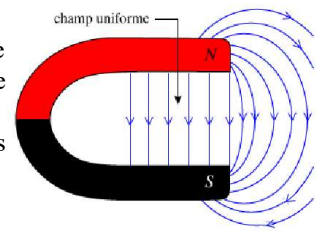
Le champ magnétostatique est intense au niveau des pôles et diminue lorsqu'on s'en éloigne car les lignes de champs se concentrent au niveau des pôles.



Pour un aimant en U, la carte de champ magnétique est la suivante.

L'aimant présente un pôle Nord (en haut) et un pôle Sud (en bas). Les lignes de champ magnétostatiques partent du pôle Nord pour rejoindre le pôle Sud de l'aimant.

Le champ magnétostatique est quasiment uniforme à l'intérieur du U car les lignes de champs sont parallèles et équidistantes dans cette zone.



### 2.3. Quelques exemples de champs magnétostatiques et ordre de grandeur.

Champ au centre d'un spire de rayon 5cm parcourue par un courant de 1A	$10^{-5}$ T	Quasiment non mesurable car inférieur au champ magnétique terrestre.
Champ magnétique terrestre	$5.10^{-5}$ T	
Sur l'axe d'un solénoïde de 1000 spires de longueur 10cm parcouru par un courant de 1 A.	$10^{-2}$ T	L'effet Joule empêche d'aller au-delà de 10A.
A la surface d'un aimant de bonne qualité	0,1 à 1 T	Variable en fonction du matériau constitutif de l'aimant.
Au voisinage d'un électroaimant	1 à 10T	On combine un bobinage de cuivre et un matériau ferromagnétique. Egalement limité par l'effet Joule.
Electroaimant à supra conducteur dans un appareil d'IRM	7T	On supprime le problème de l'effet Joule.

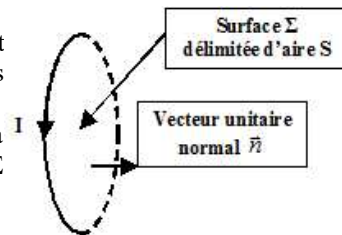
## 3. Introduction du moment magnétique.

### 3.1. Moment magnétique associé à une boucle de courant plane.

#### a. Description et définition de la boucle de courant.

On étudie le système particulier suivant, qu'on appelle boucle de courant plane. On considère un circuit fermé de forme quelconque contenu dans un plan et parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

La boucle de courant fermée délimite une surface  $\Sigma$  dans le plan la contenant. On construit alors  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface  $\Sigma$  dont le sens est donné par la règle d'Ampère.



#### b. Moment magnétique de la boucle de courant.

**Définition :** Pour la boucle de courant précédemment décrite, on définit le vecteur moment magnétique associé par la relation  $\vec{M} = SI \vec{n}$ . L'unité de moment magnétique est alors : A.m<sup>2</sup>.

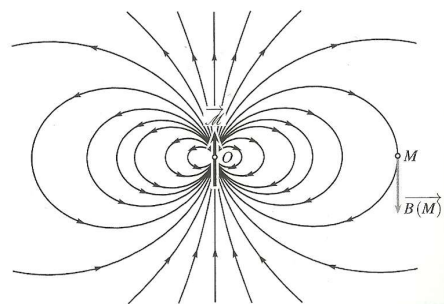
#### c. Champ magnétique loin de la source.

On se place en coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ ) par rapport au point O centre de la boucle de courant, où  $\theta$  est défini par rapport à l'axe orienté par la normale  $\vec{n}$ .

On montre que le champ magnétique loin de la source ( $r$  très grand devant le rayon de la boucle de courant) s'exprime par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{M}}{r^5} \right)$$

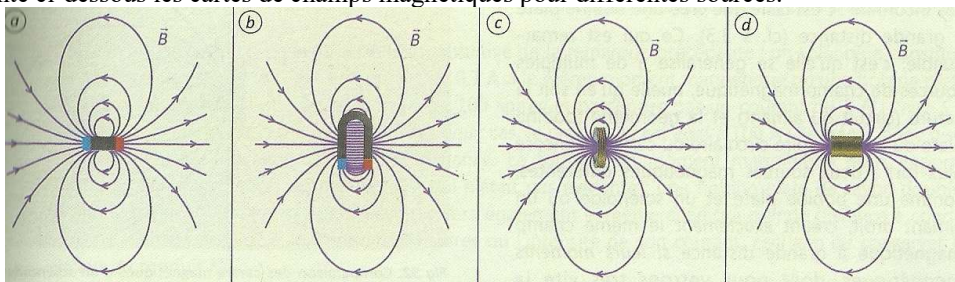
La carte de champ associée présente alors l'allure ci contre.



### 3.2. Moment magnétique pour d'autres sources de champ magnétique.

#### a. Observation des cartes de champs magnétiques.

On représente ci-dessous les cartes de champs magnétiques pour différentes sources.



(a) Aimant droit, (b) aimant en U, (c) bobine plate, (d) solénoïde « long ».

- Les cartes de champs magnétiques d'allure très proche montrent que le champ magnétique généré à grande distance ne dépend pas de la nature exacte de la source.
- La carte de champ pour chacune de ces sources est similaire à celle observée pour la boucle de courant.
- Lorsqu'on se place à proximité de la source, les cartes de champ diffèrent, et dépendent en particulier de la géométrie de la source, et de sa nature macroscopique ou microscopique.

**b. Analogie et conclusion.**

On observe une similarité des cartes de champs magnétiques à grande distance pour les différentes sources présentées avec celle du champ généré par la boucle de courant. De plus, on a vu que le champ généré à grande distance par la boucle de courant est exprimable à l'aide du moment magnétique associé à cette source. Par analogie, on peut en conclure qu'on peut associer à ces sources un moment magnétique rendant compte de sa carte de champ à grande distance.

**Conclusion** : On peut associer à de nombreuses sources de champ magnétique un vecteur moment magnétique  $\vec{M}$  qui permettra de déterminer le champ magnétique généré à grande distance.

- Pour un enroulement de spires, comme les bobines, on déterminera le moment magnétique associé en imaginant que l'ensemble des spires se superpose dans le plan médian de l'enroulement. A grande distance, l'extension spatiale de l'enroulement de spires est négligeable on exprimera le moment magnétique pour N spires de surface S parcourues par le courant d'intensité I et orientées par une même normale  $\vec{n}$  par  $\vec{M} = NSI \vec{n}$
- Pour un aimant, le moment magnétique du système résulte de la somme continue sur le volume de l'aimant des moments magnétiques microscopiques. Chaque élément de volume est porteur d'un moment magnétique infinitésimal  $d\vec{M}$ , le moment magnétique total s'exprime en intégrant sur le volume de l'aimant  $\vec{M}_{Aimant} = \iiint_V d\vec{M}$ . Ce moment résultant est orienté du pôle Sud vers le pôle Nord.

**c. Quelques exemples de moment magnétique.**

Pour l'alliage le plus performant à ce jour, (néodyme-fer-bore), l'aimantation A donnant la densité volumique de moment magnétique est mesurée à  $10^6 \text{A.m}^{-1}$  permettant de ré-exprimer  $d\vec{M} = A dV \vec{n}$ . Alors

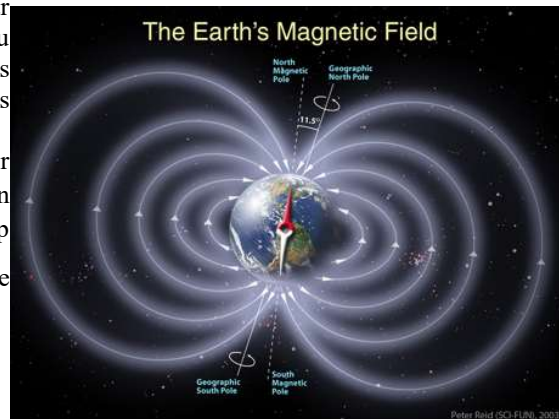
$$\vec{M}_{Aimant} = A \cdot V_{aimant} \vec{n} \quad \text{ce qui amène à un moment magnétique de norme } M_A \approx 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \text{ pour un volume } 1 \text{ cm}^3.$$

Le champ magnétique terrestre est probablement produit par des courants électriques dans la partie ferreuse liquide du noyau de la planète mais sa description exacte et les explications de son comportement à travers les âges géologiques restent un sujet actuel de recherche.

L'observation de sa carte de champ permet de modéliser cette source par un moment dipolaire planétaire  $\vec{M}_T$  dont on peut exprimer la norme par la mesure de l'intensité du champ

$$\text{à la surface } B_T \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_T}{R_T^3} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ T} \text{ ce qui nous donne}$$

$$M_T \approx 10^{23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$



### Capacités exigibles

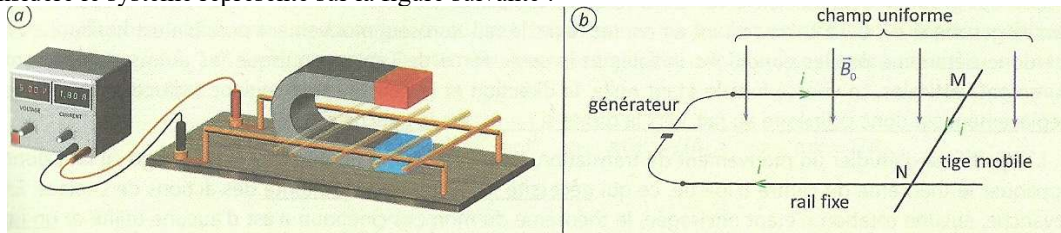
- Savoir que les courants électriques et la matière aimantée sont source de champ magnétique
- Exploiter une carte de champ magnétique : identifier l'emplacement des sources et les zones de champ fort, faible, uniforme
- Connaître l'allure de la carte de champ magnétique créé par un système assimilable à grande distance à un moment magnétique (spire, aimant droit, etc.)
- Dans des cas simples type fil long ou spire, savoir orienter qualitativement le champ magnétique connaissant le sens réel du courant et réciproquement
- Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi-uniforme.
- Connaître des ordres de grandeur de champs magnétiques : champ magnétique terrestre, au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM.
- Connaître l'expression du champ  $\vec{B}$  créé par un solénoïde (à l'intérieur et à l'extérieur).
- Savoir orienter de façon cohérente un contour et une surface s'appuyant sur ce contour.
- Définir le moment magnétique d'une boucle de courant plane.
- Par analogie, savoir que la plupart des sources magnétiques se décrivent par un moment magnétique et en connaître un ordre de grandeur.

## Action d'un champ magnétique extérieur sur un conducteur ou un aimant.

### 1. Action d'un champ magnétique extérieur sur les rails de Laplace.

#### 1.1. Observations expérimentales.

On considère le système représenté sur la figure suivante :



Le circuit électrique est composé d'un générateur imposant un courant d'intensité  $i$ , de deux rails fixes conducteurs parallèles horizontaux et d'une tige conductrice mobile. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme, stationnaire de direction perpendiculaire au plan horizontal contenant les rails et la tige mobile généré ici par un aimant en U dont le pôle nord est en haut sur la figure.

- La barre est initialement immobile sur les rails.
- Lorsqu'on allume le générateur, la barre se met en mouvement sous l'action mécanique du champ magnétique imposé. On peut mettre en évidence que le champ magnétique est la cause du mouvement de la barre en supprimant ce dernier et en constatant que la barre ne se met pas en mouvement.
- La barre est mise en translation selon la direction des rails en suivant le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}_y$ ,

#### 1.2. Interprétation.

Lorsque le circuit est mis sous tension, les électrons transportant le courant électrique dans le conducteur sont en mouvement dans le champ magnétique uniforme extérieur.

Sur chaque électron, il s'exerce alors une force de Lorentz :  $\vec{F}_{e^-} = -e \cdot \vec{v}_{e^-} \wedge \vec{B}_0$

Le courant électrique résulte du mouvement des électrons, l'intensité  $i$  est exprimable en comptant le nombre d'électrons qui traversent une section du circuit pendant une durée  $\delta t$  :

- On suppose qu'il y a une densité volumique  $n$  d'électrons constante dans la barre mobile. Les électrons traversant une section d'aire  $S$  de la barre pendant la durée  $\delta t$  sont ceux dans le cylindre droit d'aire  $S$  et de hauteur  $\|\vec{v}_{e^-}\| \delta t$  ce qui nous donne  $\delta N = nS \|\vec{v}_{e^-}\| \delta t$ .
- La charge électrique traversant la section  $S$  du circuit dans le sens de l'axe  $Ox$  sur la durée  $\delta t$  est alors :  $\delta Q = (-e) \delta N = (-e)nS \|\vec{v}_{e^-}\| \delta t$  d'après le modèle utilisé. Elle s'exprime également  $\delta Q = i \delta t$ . On en déduit que :  $i \vec{e}_x = -neS \vec{v}_{e^-}$ .

L'action mécanique totale exercée sur une portion du circuit de longueur  $dx$  s'exprime par la somme des forces de Lorentz exercée sur chaque électron contenu dans cette portion :  $d\vec{F} = (-e \vec{v}_{e^-} \wedge \vec{B}_0 \cdot nS) dx$  ce qui se réécrit d'après la relation précédente :  $d\vec{F} = (i \cdot \vec{e}_x \wedge \vec{B}_0) dx$

La résultante de l'action mécanique sur la tige est la somme des actions sur les différents éléments de la tige :

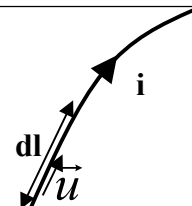
$$\vec{F} = \int_M^N d\vec{F} = \int_0^L (i \cdot \vec{e}_x \wedge \vec{B}_0) dx = i \cdot L \vec{e}_x \wedge \vec{B}_0$$

#### 1.3. Action mécanique de Laplace exercée par un champ magnétique extérieur sur une portion de circuit électrique.

Un champ magnétique extérieur exerce sur une portion de circuit électrique parcourue par un courant d'intensité  $i$  une action mécanique dite de Laplace.

Pour une portion de circuit de longueur  $dl$ , parcourue par une intensité  $i$  dans le sens du vecteur unitaire directeur du courant électrique  $\vec{u}$ , la force élémentaire de Laplace s'exprime :

$$d\vec{F} = i dl (\vec{u} \wedge \vec{B}_0) = i d\vec{l} \wedge \vec{B}_0$$



### 1.4. Résultante de l'action mécanique de Laplace exercée par un champ magnétique extérieur sur la tige rectiligne du système des rails de Laplace.

Pour déterminer la résultante de l'action mécanique sur un circuit, on somme alors les forces élémentaires de Laplace sur l'ensemble du circuit. Par exemple sur une tige de longueur  $L$  parcourue par un courant  $i$  dans le sens croissant de  $\vec{e}_x$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  la résultante de l'action de Laplace s'écrit :

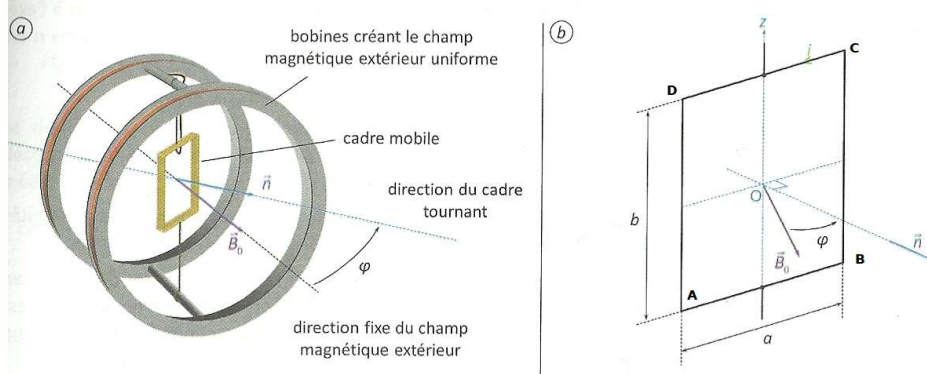
$$\vec{F} = \int_M^N d\vec{F} = \int_0^L (i dx \vec{e}_x \wedge \vec{B}_0) = iL \vec{e}_x \wedge \vec{B}_0 = iLB_0 \vec{e}_y$$

Comme on l'a constaté sur la vidéo, la barre est alors mise en mouvement de translation selon la direction et le sens de  $\vec{e}_y$ . La puissance de l'action de Laplace sur la barre s'exprime alors  $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = iLB_0 \dot{y}$  qui est positive ce qui est logique puisque l'action de Laplace est ici une action motrice, c'est elle qui est la cause du mouvement de la barre.

## 2. Action mécanique sur une spire rectangulaire.

### 2.1. Observations expérimentales.

On étudie maintenant l'action mécanique de Laplace d'un champ considéré comme uniforme sur un enroulement de spires rectangulaires qu'on modélise par une boucle de courant rectangulaire parcourue par un courant d'intensité  $i$  et qui présente donc un moment magnétique  $\vec{M} = abi \vec{n}$



- Lorsqu'on fait circuler un courant dans l'enroulement de spires, le cadre est mis en rotation autour de l'axe  $Oz$  sous l'effet de l'action mécanique de Laplace exercée par le champ magnétique.
- Le seul mouvement observé est une rotation du cadre autour de l'axe  $Oz$ , ce qui suggère que l'action mécanique est un couple.
- Le cadre finit par se stabiliser dans la position pour laquelle le vecteur normal  $\vec{n}$  est de même direction et de même sens que le champ magnétique  $\vec{B}_0$ .

### 2.2. Interprétation.

On commence par déterminer la résultante de l'action mécanique de Laplace sur le cadre :

Pour le côté  $AB$ , le courant d'intensité  $i$  circule selon la direction et le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ , la résultante

de Laplace sur  $AB$  est 
$$\vec{F}_{AB} = \int_A^B d\vec{F} = \int_{-a/2}^{a/2} i dx \vec{u}_x \wedge \vec{B}_0$$
 finalement  $\vec{F}_{AB} = i \cdot a \vec{u}_x \wedge \vec{B}_0$

On peut également noter que la force élémentaire est uniforme sur le côté  $AB$ .

Sur le côté  $CD$ , on a alors une force élémentaire uniforme s'exprimant  $\vec{F}_{CD} = -i \cdot a \vec{u}_x \wedge \vec{B}_0$

Pour le côté  $BC$ , le courant d'intensité  $i$  circule selon la direction et le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ , la force sur chaque élément est la même et la résultante de Laplace sur  $BC$  est  $\vec{F}_{BC} = i \cdot b \vec{u}_z \wedge \vec{B}_0$

Sur le côté  $DA$ , la force élémentaire est encore uniforme et on a pour résultante  $\vec{F}_{DA} = -i \cdot b \vec{u}_z \wedge \vec{B}_0$

En sommant les quatre, on obtient la résultante de l'action de Laplace sur le cadre et on constate qu'elle est nulle. On confirme donc par le calcul que l'action mécanique de Laplace sur le cadre est un couple.

On détermine alors le moment de cette action mécanique :

Lorsqu'on considère un des coté du cadre, la force de Laplace exercée sur chaque élément est une constante, similaire au cas de la force de gravitation. On applique le modèle du glisseur pour le calcul des moments associés à chaque côté. On la modélise par un vecteur force dont l'expression est donnée par la résultante sur ce côté appliqué au centre du coté considéré.

On obtient alors pour le moment en  $O$  de l'action mécanique les expressions suivantes pour chacun des côtés :

$\vec{\Gamma}_{O;AB} = \overrightarrow{OO_{AB}} \wedge \vec{F}_{AB} = -\frac{b}{2} \vec{u}_z \wedge (i a \vec{u}_x \wedge \vec{B}_O)$  D'après le schéma, puisque le cadre est en rotation autour de l'axe Oz,  $(\vec{u}_x \wedge \vec{B}_O) // \vec{u}_z$ , on en conclut que  $\vec{\Gamma}_{O;AB} = \vec{0}$ , de même  $\vec{\Gamma}_{O;CD} = \vec{0}$

$$\vec{\Gamma}_{O;BC} = \overrightarrow{OO_{BC}} \wedge \vec{F}_{BC} = \frac{a}{2} \vec{u}_x \wedge (i b \vec{u}_z \wedge \vec{B}_O) = \frac{iabB_O}{2} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_{\vec{B}_O + \pi/2} = \frac{iabB_O}{2} \vec{n} \wedge \vec{u}_{\vec{B}_O} = \frac{iab}{2} \vec{n} \wedge \vec{B}_O$$

De même on obtient :  $\vec{\Gamma}_{O;DA} = \overrightarrow{OO_{DA}} \wedge \vec{F}_{DA} = \frac{iab}{2} \vec{n} \wedge \vec{B}_O$

Finalement le moment résultant de l'action mécanique de Laplace est  $\vec{\Gamma} = iab \vec{n} \wedge \vec{B}_O = \vec{M} \wedge \vec{B}_O$

### 2.3. Conclusion et généralisation.

Pour un système indéformable caractérisé par un moment magnétique  $\vec{M}$  placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_O$ , l'action mécanique de Laplace se résume à un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_O$

Pour le cadre rectangulaire de l'étude, on obtient  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_O = -iabB_O \sin \varphi \vec{u}_z$

On avait montré que le théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe s'obtenait en multipliant par la vitesse de rotation le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation.

Le théorème du moment cinétique s'écrit ici  $J \dot{\varphi} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = -iabB_O \sin \varphi$  D'où  $J \dot{\varphi} = \frac{dE_C}{dt} = -iabB_O \dot{\varphi} \sin \varphi$

On en déduit la puissance  $P_L$  de l'action de Laplace  $P_L = -iabB_O \dot{\varphi} \sin \varphi = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$

## 3. Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant.

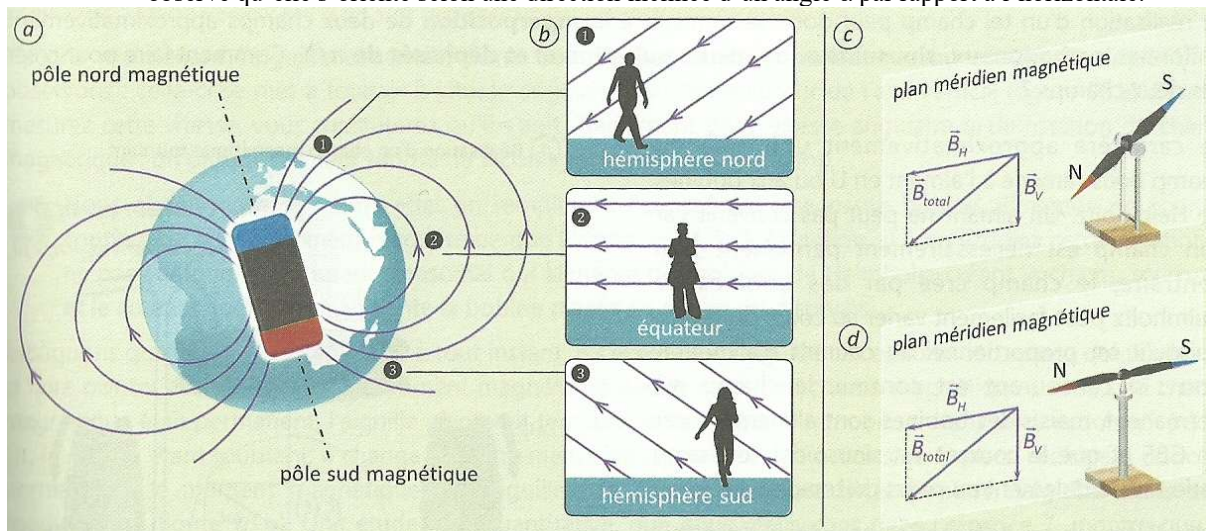
Un aimant a pour élément principal de description son vecteur moment magnétique noté par la suite  $\vec{M}_A$

### 3.1. Cas d'un champ magnétique stationnaire.

#### a. Observations.

On étudie l'aiguille aimantée d'une boussole soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. On peut reprendre les observations faites lorsque le champ magnétique considéré est celui généré par la terre.

- Si la boussole est astreinte à une rotation autour d'un axe vertical local, elle indique la direction du pôle magnétique Nord de la planète.
- Si la boussole est astreinte à une rotation autour d'un axe horizontal de direction est Ouest, on observe qu'elle s'oriente selon une direction inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.



#### b. Observations.

Le champ magnétique terrestre applique sur l'aiguille aimantée de la boussole un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M}_A \wedge \vec{B}_T$

- Les positions d'équilibre de la boussole sont données par l'annulation du moment par rapport à l'axe de rotation de l'aiguille exercé par le champ magnétique terrestre.

Pour la boussole en rotation autour de l'axe vertical local :

$$\Gamma_z = \begin{pmatrix} M_A \cos \varphi \\ M_A \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_T \cos \alpha \\ 0 \\ -B_T \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_z = -M_A B_T \cos \alpha \sin \varphi$$

où  $\varphi$  repère la position angulaire du pôle nord de l'aiguille par rapport au nord magnétique.

Il existe donc deux positions d'équilibre pour  $\varphi = 0$  (vers le Nord) et pour  $\varphi = \pi$  (pointe vers le Sud).  
La première est stable et la seconde instable ce qu'on vérifie par des méthodes dynamiques :

- On imagine qu'on écarte légèrement la boussole de sa position d'équilibre  $\varphi = 0 + \delta\varphi > 0$ . Le moment exercé est alors  $\Gamma_z = -M_A B_T \cos\alpha \sin \delta\varphi < 0$  et qui ramène l'aiguille vers la position testée, celle-ci est donc stable.
- De même, on montre que la position d'équilibre  $\varphi = \pi$  est instable. En effet  $\varphi = \pi + \delta\varphi > 0$ .  
 $\Gamma_z = -M_A B_T \cos\alpha \sin(\pi + \delta\varphi) > 0$

- Autre approche : la puissance de l'action mécanique de Laplace sur l'aiguille de la Boussole s'exprime :  

$$P_L = \Gamma_z \dot{\varphi} = -M_A B_T \cos\alpha \dot{\varphi} \sin\varphi$$

travail	élémentaire	s'exprime
---------	-------------	-----------

$$P_L dt = -M_A B_T \cos\alpha \sin\varphi d\varphi = -d(-M_A B_T \cos\alpha \cos\varphi) = -dE_p$$

On met alors en évidence une énergie potentielle  $E_p = -M_A B_T \cos\alpha \cos\varphi = -\vec{M}_A \cdot \vec{B}_T$

- Les extrema de l'énergie potentielle donnent les positions d'équilibre  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi$ .
- La position  $\varphi = 0$  est un minimum donc une position d'équilibre stable. La position  $\varphi = \pi$  est un maximum donc une position d'équilibre instable.

### 3.2. Cas d'un champ magnétique tournant.

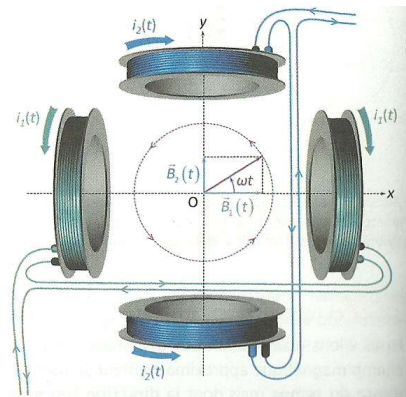
#### a. Réalisation du champ magnétique tournant.

On alimente un système de bobines avec des courants électriques d'intensité  $i_1(t) = i_0 \cos(\omega t)$  et  $i_2(t) = i_0 \sin(\omega t)$ .

On génère ainsi dans l'espace entre les bobines un champ quasiment uniforme mais non permanent.

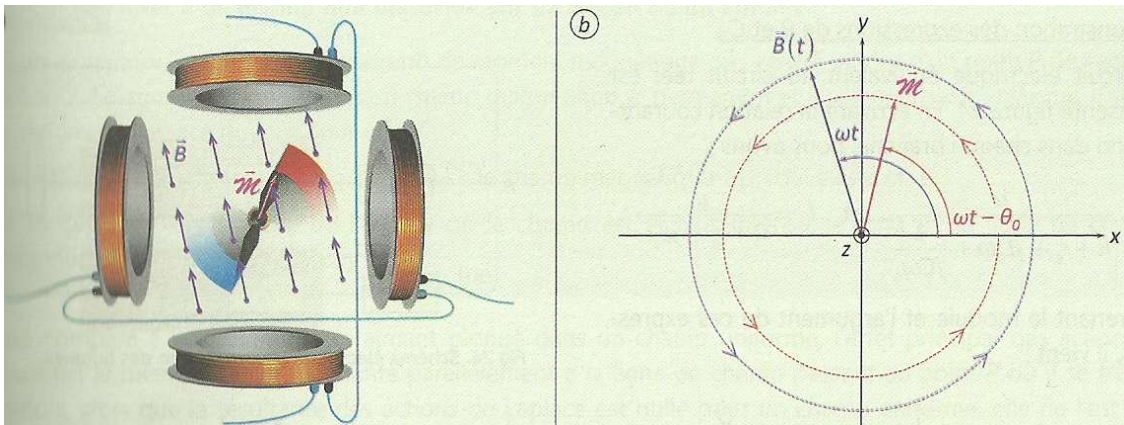
Le premier système de bobine génère un champ :  $\vec{B}_1(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$   
et le second  $\vec{B}_2(t) = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_y$

Le champ total généré s'exprime alors  $\vec{B}_T(t) = B_0 \vec{e}_{\omega t}$  un champ de norme constante mais dont le vecteur unitaire donnant la direction et le sens tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le plan du schéma.



#### b. Observations.

On place alors l'aiguille de boussole dans l'espace où règne le champ magnétique quasi-uniforme en choisissant un axe de rotation de l'aiguille perpendiculaire au plan dans lequel le vecteur directeur du champ magnétique tourne.



- Lorsqu'on lance le générateur alimentant les bobines, on peut observer que l'aiguille est mise en rotation.
- En déterminant sa vitesse de rotation, on montre qu'elle est égale à  $\omega$ . On a réalisé un système équivalent aux moteurs synchrones qui équipent certains systèmes à propulsion électrique (TGV, moteur de véhicule hybride par exemple).

#### c. Interprétations.

On peut commencer par faire une interprétation quasi statique :

- Le champ magnétique exerce sur l'aiguille un moment par rapport à l'axe de rotation :  

$$\Gamma = (\vec{M}_A \wedge \vec{B}_O) \cdot \vec{e}_z$$
et l'aiguille est en permanence située dans sa position d'équilibre stable en suivant le champ magnétique tournant dans sa rotation.

Cette interprétation est peu satisfaisante car si l'aiguille est en permanence dans sa position d'équilibre stable par rapport au champ, le moment dynamique subi est en permanence nul et aucune puissance ne s'exerce. La mise en rotation est alors difficile à comprendre.

Passons donc à une interprétation dynamique :

- Le champ magnétique exerce sur l'aiguille un moment par rapport à l'axe de rotation  $\Gamma = (\vec{M}_A \wedge \vec{B}_O) \cdot \vec{e}_z$
- On doit rajouter un moment dynamique de charge, modélisant pour l'aiguille de la boussole le moment dynamique de frottement par pivotement autour de l'axe de rotation. Dans ce cas il est fort probablement très petit... Mais en pratique, il modélisera l'ensemble des actions mécaniques s'opposant à la mise en rotation de l'arbre de transmission dans un moteur électrique synchrone. On en prend un modèle simple en considérant un moment dynamique par frottement de pivotement solide constant :  $-\Gamma_o$  (pour une rotation dans le sens trigonométrique du rotor).

On applique alors la loi du moment cinétique par rapport à l'axe Oz pour le solide mis en rotation, l'aiguille dans notre expérience, l'arbre de transmission dans un moteur électrique :  $J \frac{d\Omega}{dt} = M_A B_O \sin(\vec{M}_A \vec{B}_O) - \Gamma_o$

On se place dans le cadre du régime permanent pour lequel on a observé que l'aiguille tourne de manière synchrone avec le champ magnétique, on suppose alors que sa position angulaire est donnée par :  $\varphi(t) = \omega t - \theta_o$ . On obtient alors :  $0 = M_A B_O \sin(\theta_o) - \Gamma_o$ .

Le retard angulaire de l'aiguille sur le champ magnétique est alors obtenu par  $\sin(\theta_o) = \frac{\Gamma_o}{M_A B_O}$ .

On peut alors faire le commentaire suivant :

- Si le moment de frottement est trop grand, il est impossible d'atteindre ce régime de fonctionnement stationnaire.
- La puissance fournie s'exprime alors :  $P_L = M_A B_O \omega \sin \theta_o = \omega \Gamma_o$ . La puissance dissipée par le frottement de pivotement s'exprime  $P_S = -\omega \Gamma_o$ . La puissance totale est bien nulle et on explique la rotation à vitesse uniforme de l'aiguille.

### Capacités exigibles

- Etablir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace exercées sur une tige conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire.
- Etablir et exploiter l'expression du couple de Laplace exercé sur un dipôle magnétique (spire ou autre) en rotation placée dans un champ magnétique extérieur uniforme.
- Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.