

Phénomène d'induction dans un circuit électrocinétique.

Introduction.

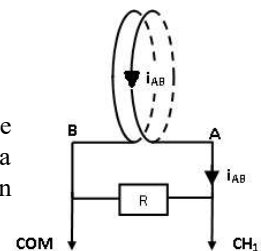
Ce chapitre est consacré à l'étude du phénomène d'induction à la base de la conception d'un grand nombre de systèmes, on peut citer pour exemples :

- En électrocinétique : le comportement d'une bobine est régi par l'auto-induction, les transformateurs électriques sont basés sur l'induction mutuelle entre deux circuits.
- En électrotechnique : les turbines mises en mouvement par l'écoulement d'un fluide produisent l'électricité dans les centrales via le phénomène d'induction. Le phénomène peut être vu comme le phénomène inverse de l'action mécanique exercée sur un circuit par un champ magnétique mis en œuvre dans les moteurs électriques dont on a vu un exemple avec le moteur synchrone.
- On peut également citer les plaques à induction de plus en plus répandues dans les cuisines domestiques.

1. Introduction des lois de l'induction.

1.1. Introduction expérimentale.

On réalise un circuit contenant uniquement une bobine et une résistance, en absence de tout générateur électrique. On observe sur l'oscilloscope la tension aux bornes de la bobine. La résistance permet de fermer le circuit rendant ainsi possible la circulation d'un courant.



Sans générateur électrique, il n'y a a priori pas de tension aux bornes de la bobine, c'est ce qu'on peut observer si on ne réalise aucune manipulation supplémentaire.

On approche alors le pôle nord d'un aimant de la bobine, on observe l'apparition d'une tension négative aux bornes de cette dernière.

La tension étant négative aux bornes de la résistance, on en déduit (avec les conventions établies sur le schéma précédent) qu'un courant d'intensité $i_{AB} < 0$ s'établit dans la bobine.

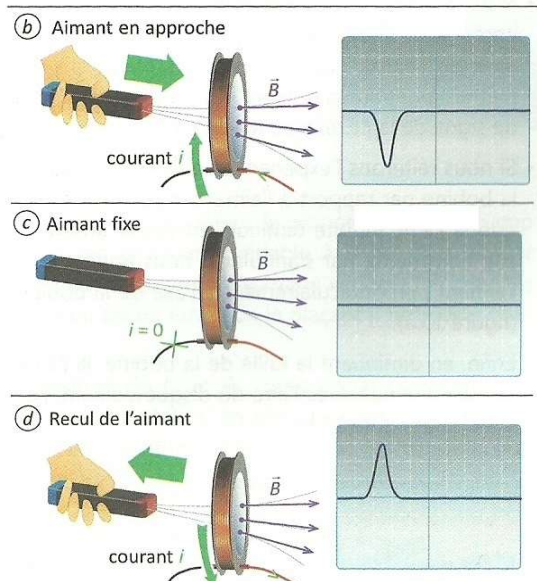
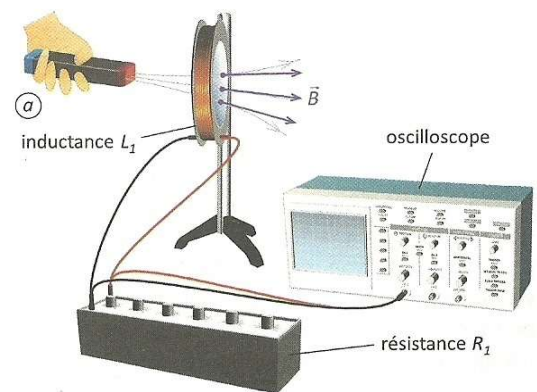
Les valeurs de la tension et de l'intensité établies dans le circuit sont d'autant plus importantes que le mouvement de l'aimant en approche est rapide.

Lorsque l'aimant est immobile, il n'y a plus de tension qui apparaît aux bornes de la bobine.

On éloigne alors le pôle nord de l'aimant de la bobine, on observe l'apparition d'une tension positive aux bornes de cette dernière.

La tension étant positive aux bornes de la résistance, on en déduit qu'un courant d'intensité $i_{AB} > 0$ s'établit dans la bobine.

Les valeurs de la tension et de l'intensité établies dans le circuit sont d'autant plus importantes que le mouvement de l'aimant est rapide.

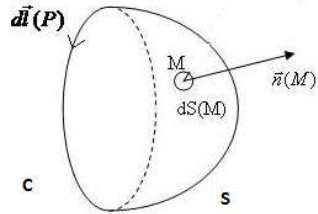


1.2. Un outil nécessaire à l'interprétation : le flux du champ magnétique à travers une surface orientée.

a. Surface orientée.

Une surface orientée S est une surface pour laquelle on définit en tout point M un vecteur normal $\vec{n}(M)$ avec deux possibilités :

- La surface est fermée et délimite un domaine de l'espace de dimension fini. On peut alors orienter la surface vers l'intérieur ou l'extérieur. La convention habituelle est de considérer l'orientation vers l'extérieur pour écrire les lois de l'électromagnétisme par exemple.
- La surface n'est pas fermée. Elle s'appuie sur un contour fermé C . On définit alors un sens de parcours pour C et la surface est orientée de manière cohérente au sens de parcours de C par la règle d'ampère.

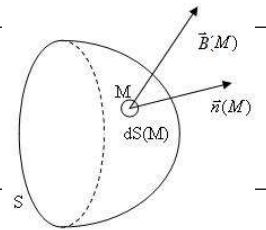


b. Flux du champ magnétique à travers une surface orientée.

On définit le flux élémentaire $d\Phi(M)$ du champ magnétique à travers un élément de surface orienté par $d\Phi(M) = \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \vec{B}(M) \cdot dS(M) \vec{n}(M)$

Alors le flux Φ_S du champ magnétique à travers une surface orientée S s'exprime :

$$\Phi_S = \iint_S d\Phi(M) = \iint_S \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$



c. Champ uniforme et surface orientée plane.

On considère le système de la boucle de courant, délimitant une surface d'aire S dans un plan.

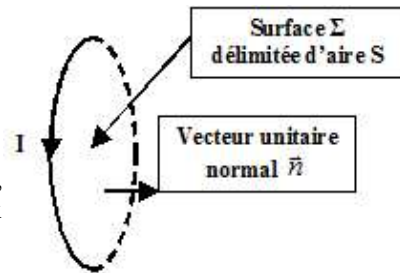
On considère alors un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}$

En tout point de la surface orientée, on détermine le flux élémentaire :

$$d\Phi(M) = \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = B_0 \cdot \cos(\vec{n}, \vec{u}) \cdot dS$$

Celui-ci est alors le produit d'un terme constant et de l'aire élémentaire dS , on peut donc en conclure que l'intégration sur la surface mènera à un flux $\Phi = B_0 S \cos(\vec{n}, \vec{u})$

Pour une bobine plane de N spires $\Phi_{bob} = N\Phi = NB_0 S \cos(\vec{n}, \vec{u})$



1.3. Interprétation qualitative de l'expérience. Loi de modération de Lenz.

Revenons à l'expérience introductive :

- Lorsqu'on approche l'aimant de la bobine :
 - le flux du champ magnétique de l'aimant à travers la surface plane s'appuyant sur une boucle de courant de la bobine augmente.
 - On constate l'apparition d'un courant d'intensité négative dans la bobine.
 - Ce courant génère comme on l'a vu précédemment un champ magnétique propre à la bobine dont le sens est opposé à celui de \vec{n} . La bobine génère un flux magnétique propre négatif.
- Lorsqu'on retire l'aimant de la bobine :
 - le flux du champ magnétique de l'aimant à travers la surface plane s'appuyant sur une boucle de courant de la bobine diminue.
 - On constate l'apparition d'un courant d'intensité positive dans la bobine.
 - Ce courant génère un champ magnétique propre à la bobine dont le sens est le même que celui de \vec{n} . La bobine génère un flux magnétique propre positif.

Conclusion : Lorsqu'on fait varier le flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur la bobine, le phénomène d'induction entraîne l'apparition d'un courant électrique induit dans la bobine générant un champ magnétique de flux opposé à cette variation.

Cette observation expérimentale se généralise à l'ensemble des systèmes dans lesquels le phénomène d'induction se manifeste, on l'énonce de manière générale à travers la loi de modération de Lenz.

Loi de Lenz : Le courant électrique **induit (qui apparaît suite au phénomène d'induction)** dans un circuit, tend par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance.

Remarque :

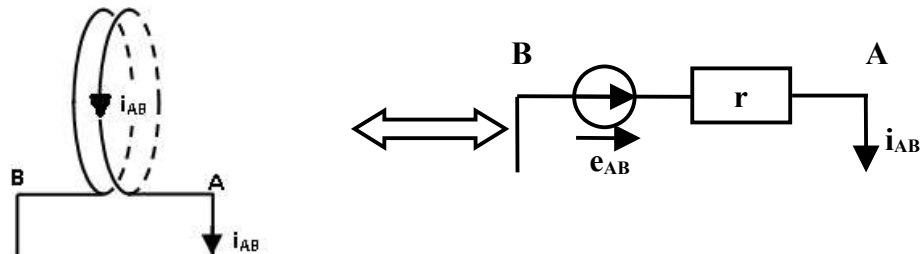
- Cette loi est fondamentale, elle est le pilier de la compréhension qualitative de tous les systèmes à induction, elle doit donc être invoquée systématiquement pour interpréter les observations.
- Elle sert également d'outil pour vérifier la cohérence des signes dans les calculs menés dans ce type de systèmes.

1.4. Interprétation quantitative de l'expérience. Loi de Faraday.

Reprenons le schéma de l'expérience :

On a observé que l'évolution temporelle du flux du champ magnétique fait apparaître une tension aux bornes de la bobine et qu'un courant s'établit alors dans le circuit.

- Du point de vue électrocinétique, la bobine se comporte donc comme un générateur que l'on peut modéliser avec les systèmes introduits dans le cours sur l'électrocinétique.
- On peut donc remplacer la bobine par un générateur de Thévenin comportant une source de tension idéale caractérisée par une fem $e_{AB}(t)$ et une résistance interne r .



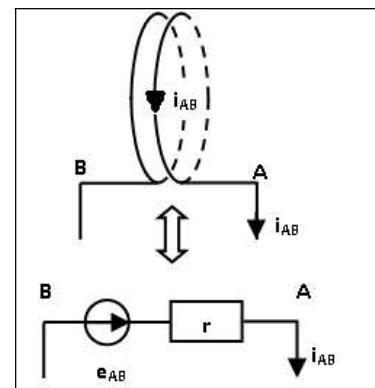
- La force électromotrice doit rendre compte des observations faites :
 - Elle est nulle si le flux du champ magnétique ne varie pas dans le temps.
 - Elle entraîne l'existence d'un courant d'intensité négative si le flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur une boucle de courant de la bobine augmente.
 - En terme d'unité : e_{AB} est une tension en Volt, Φ est une flux du champ magnétique et s'exprime donc en $T.m^2$.

En s'appuyant sur les deux éléments de la force de Lorentz $\|\vec{E}\|$ est homogène à $\|\vec{v}_{M/R}\| \|\vec{B}\|$ d'où $V.m^{-1} \propto m.s^{-1}.T$, le flux est donc homogène à des $V.s$ et sa dérivée temporelle à des Volts.

- L'ensemble de ces éléments qualitatifs permet d'expliquer qualitativement l'énoncé de la loi de Faraday suivante.

Loi de Faraday : Soit un circuit fermé et orienté C, à travers lequel un champ magnétique génère un flux Φ . Toute variation de ce flux entraîne dans le circuit l'apparition d'une fem induite e_{AB} , exprimée par la relation :

$$e_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



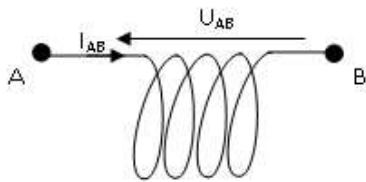
Le comportement générateur du circuit électrique a donc pour origine les modifications du flux du champ magnétique à travers la surface s'appuyant sur ce circuit :

- Dans l'expérience d'introduction, on a envisagé **un circuit fixe dans le référentiel d'étude plongé dans un champ magnétique variable**. Ce sont les modifications du champ magnétique qui entraîne les variations du flux déterminé dans le référentiel d'étude : on désigne cette situation comme **le cas de Neumann de l'induction**. La suite de ce cours présentera des situations illustrant ce cas de Neumann.
- On peut également envisager des modifications du flux du champ magnétique lorsqu'on étudie un circuit mobile dans un champ magnétique permanent dans le référentiel d'étude. On désigne cette situation comme **le cas de Lorentz de l'induction**. Ce cas sera illustrer dans le cours suivant où on devra alors étudier le couplage entre les effets de l'induction dans un circuit et l'action mécanique de Laplace sur ce circuit.
- Si on envisage un circuit indéformable (un solide du point de vue de la mécanique), on peut passer d'une situation à l'autre en envisageant un changement de référentiels entre le référentiel lié au circuit indéformable et le référentiel de la « source » du champ magnétique permanent.
- Ce ne sont pas les seules situations possibles, ces deux cas sont cependant importants car ces deux situations expérimentales ont longtemps été étudiées séparément avant que la loi de Faraday vienne proposer une interprétation unificatrice de ces deux contextes expérimentaux.

2. Auto-induction dans une bobine.

2.1. Rappel et approche qualitative du comportement.

Rappel des propriétés électrocinétiques d'une bobine :



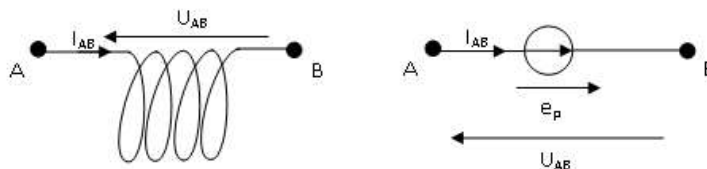
$$\text{Equation caractéristique : } U_{AB} = L \frac{dI_{AB}}{dt}$$

L désigne dans l'équation caractéristique l'inductance propre de la bobine, elle s'exprime en Henry.

On peut maintenant interpréter à l'aide du phénomène d'induction ce comportement :

- Le courant électrique dans la bobine génère un champ magnétique propre.
- Ce champ magnétique propre génère un flux propre à la bobine Φ_p à travers les surfaces s'appuyant sur les boucles de courant de la bobine.
- Par induction, ce flux magnétique propre entraîne le comportement générateur de la bobine.
- **La loi de modération de Lenz affirme alors que l'effet inductif s'oppose à la cause qui lui a donné naissance. Le comportement générateur induit par les variations de l'intensité du courant électrique dans la bobine va donc s'opposer à ces variations.**

La situation est alors la suivante :



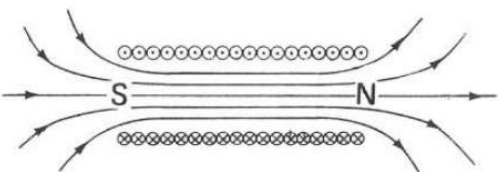
- Le courant électrique entraîne la création d'un champ magnétique propre proportionnel à l'intensité I_{AB} dans le circuit dont l'expression en tout point de l'espace dépendra de la géométrie de la bobine.
- Le flux de ce champ magnétique propre dépendra de l'expression du champ en tout point de la surface s'appuyant sur les boucles de courant de la bobine mais il sera au final proportionnel à l'intensité I_{AB} du courant parcourant la bobine.

Définition : L'inductance propre L de la bobine désigne le rapport de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité du courant dans la bobine $\Phi_p = LI_{AB}$

- En appliquant la loi de Faraday, on obtient alors : $e_p = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L \frac{dI_{AB}}{dt}$ le circuit étant fixe son inductance propre L est une constante.
- On obtient au final par application de la loi de Faraday $U_{AB} = -e_p = L \frac{dI_{AB}}{dt}$.

2.2. Évaluation quantitative d'une inductance propre.

On considère un solénoïde long de longueur a constitué d'un enroulement de N spires parcourues par un courant commun d'intensité I. En négligeant les effets de bords, on considère qu'à l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique est exprimé par la relation : $\vec{B}_p = \mu_0 \frac{N}{a} I \vec{u}_L$ ce champ est uniforme en tout point à l'intérieur du solénoïde.



On détermine alors le flux à travers les boucles de courant du solénoïde à l'aide de la relation obtenue précédemment dans ce cours : $\Phi_p = NB_p S \cos(\vec{u}_L, \vec{u}_L) = \mu_0 \frac{N^2}{a} SI = LI$

L'inductance propre pour ce solénoïde dans le modèle simple utilisé s'exprime donc $L = \mu_0 \frac{N^2}{a} S$

Un calcul d'ordre de grandeur pour une bobine de TP de 1000 spires de longueur a = 10 cm, de section carré de coté 5cm donne $L \approx 4\pi 10^7 \frac{10^6}{10^{-1}} 25 \cdot 10^{-4} \approx 3 \cdot 10^{-2} H$.

Notre calcul ne donne pas la valeur exacte puisqu'on a appliqué un modèle trop simple vis-à-vis de la réelle géométrie de la bobine étudiée mais il donne toute de même l'ordre de grandeur de l'inductance propre de cette bobine qui est affichée à $8 \cdot 10^{-2} H$.

2.3. Bilan de puissance dans une bobine.

Reprenons rapidement le bilan de puissance avec les méthodes déjà mises en œuvre lors du cours d'électrocinétique en début d'année :

La puissance reçue par la bobine s'exprime : $P = U_{AB} I_{AB} = L I_{AB} \frac{dI_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I_{AB}^2 \right)$

On peut alors exprimer cette puissance comme la dérivée d'une énergie $P = \frac{d}{dt} (E_{Bob})$ avec $E_{Bob} = \frac{1}{2} L I_{AB}^2$

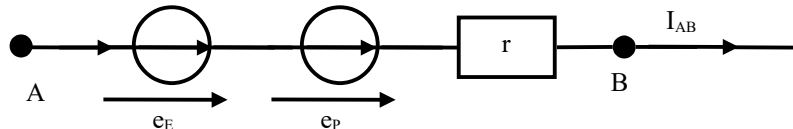
Cette énergie est stockée dans la bobine, l'intensité du courant assurant la création d'un champ magnétique par la bobine, elle est de nature magnétique comme nous l'avons affirmé sans pouvoir l'expliquer en début d'année.

2.4. Bobine plongée dans un champ magnétique extérieur.

On reprend le système de l'expérience introductrice :

- La bobine est plongée dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_E créé par l'aimant qui génère donc un flux Φ_E . La loi de Faraday rend alors compte du phénomène d'induction dans la bobine pour ce champ magnétique extérieur $e_E = -\frac{d\Phi_E}{dt}$.
- Le courant dans la bobine génère son champ magnétique propre \vec{B}_p qui génère un flux propre Φ_p . La loi de Faraday rend alors compte du phénomène d'auto-induction dans la bobine $e_p = -\frac{d\Phi_p}{dt}$.
- Ajoutons alors la résistance r de l'enroulement de spire dans notre modélisation.

Le schéma électrique équivalent pour le circuit est alors le suivant :



On peut écrire l'équation

caractéristique pour le dipôle AB $U_{AB} = -e_E - e_p + r I_{AB} = \frac{d\Phi_E}{dt} + L \frac{dI_{AB}}{dt} + r I_{AB}$

Où on distingue clairement la fem d'induction vis-à-vis du champ magnétique extérieur et la fem d'auto-induction de la bobine.

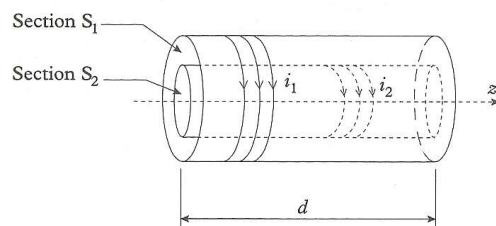
Dans les exercices d'application on aura affaire à différentes modélisations pour une bobine en fonction de la nécessité de tenir compte des différents éléments dans le schéma précédent :

- Il arrive souvent que le flux d'auto-induction soit négligeable devant le flux d'induction extérieur. La modélisation sera alors simplifiée en éliminant du modèle la fem d'auto-induction.
- Il peut arriver qu'on puisse négliger la résistance de l'enroulement de fils constituant la bobine. On élimine alors cet élément de la description.

3. Induction mutuelle entre deux bobines.

3.1. Flux croisés des champs magnétiques.

On étudie un système de deux solénoïdes long de même longueur d , orientés le long du même axe Oz , enroulés sur deux cylindres de section S_1 et S_2 et présentant des nombres de spires N_1 et N_2 .



L'enroulement 1 crée dans son volume intérieur un champ magnétique $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{d} i_1 \vec{u}_z$

- Ce champ génère à travers le solénoïde 1 un flux propre exprimé par $\Phi_{11} = \left(\mu_0 \frac{N_1^2}{d} S_1 \right) i_1$
- Il génère également à travers le solénoïde 2 un flux croisé $\Phi_{12} = \left(\mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} S_2 \right) i_1$

L'enroulement 2 crée dans son volume intérieur un champ magnétique $\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{d} i_2 \vec{u}_z$

- Ce champ génère à travers le solénoïde 2 un flux propre exprimé par $\Phi_{22} = \left(\mu_0 \frac{N_2^2}{d} S_2 \right) i_2$
- Il génère également à travers le solénoïde 1 un flux croisé $\Phi_{21} = \left(\mu_0 \frac{N_1 N_2}{d} S_1 \right) i_2$

On observe donc qu'on peut écrire les relations entre flux et intensité dans les solénoïdes sous la forme :

$$\Phi_{11} = L_1 i_1 ; \Phi_{22} = L_2 i_2 ; \Phi_{12} = M i_1 ; \Phi_{21} = M i_2$$

- L_1 est l'inductance propre de la bobine 1, L_2 l'inductance propre de la bobine 2.
- On nomme alors M l'inductance mutuelle des deux bobines qui est une valeur commune permettant d'exprimer les flux magnétiques croisés entre les deux bobines.

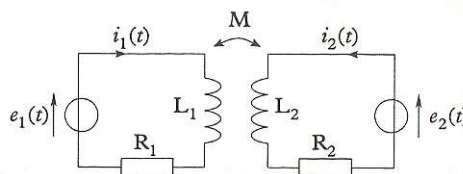
Conclusion et généralisation : Lorsque deux circuits électriques échangent des flux magnétiques croisés, on dit qu'ils sont couplés par induction mutuelle et on peut exprimer ces flux à l'aide de l'inductance mutuelle des deux circuits qui est un coefficient unique.

Le flux du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 s'exprime : $\Phi_{12} = M i_1$

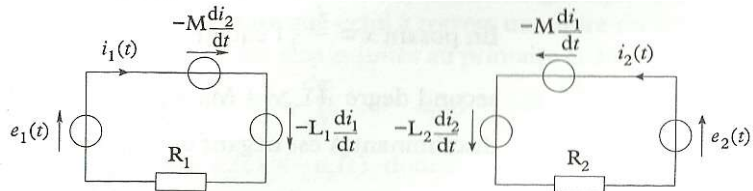
Le flux du champ créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 s'exprime : $\Phi_{21} = M i_2$

3.2. Etude de deux circuits couplés par induction mutuelle.

Prenons deux circuits couplés par inductance mutuelle selon le schéma suivant :



On peut alors reprendre ce schéma en introduisant les sources de tension modélisant les phénomènes d'induction dans ces deux circuits.



L'écriture des lois des mailles amènent alors à écrire le système de deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = e_1 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = e_2 \end{cases}$$

On peut en déduire un bilan de puissance dans le système

$$\begin{cases} L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1^2 = e_1 i_1 \\ L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2^2 = e_2 i_2 \end{cases}$$

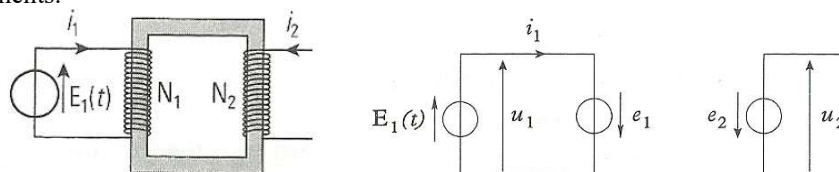
Ce qui donne en sommant les deux lignes $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) + (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) = (e_1 i_1 + e_2 i_2)$

La puissance totale $P_G = (e_1 i_1 + e_2 i_2)$ fournie par les deux générateurs est partiellement dissipée par effet Joule dans les conducteur ohmique $P_J = (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2)$ et partiellement stockée sous forme d'énergie magnétique dans le système de bobines $E_{Mag} = \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$. Cette énergie magnétique sert à créer le champ magnétique dans le système de deux bobines et s'exprime en fonction des inductances propres et de l'inductance mutuelle.

3.3. Exemple d'application, le transformateur de tension.

On considère le système du **transformateur idéal** :

- Une source de tension idéale alimente un enroulement de N_1 spires effectué sur un cadre ferromagnétique. Sur ce même cadre ferromagnétique, on réalise un second enroulement de N_2 spires.
- Le cadre ferromagnétique permet de conduire le flux du champ magnétique entre les deux enroulements assurant ainsi que dans le système le flux magnétique est le même pour les spires des deux enroulements.



- Les deux circuits sont alors modélisés par les schémas équivalents donnés ci-dessus.

Pour le circuit 1, la loi des mailles donne : $E_1(t) = u_1(t) = -e_1(t) = N_1 \frac{d\varphi}{dt}$ où φ désigne le flux du champ magnétique conduit par le cadre ferromagnétique.

Pour le circuit 2, on écrit alors la loi de Faraday : $u_2(t) = -e_2(t) = N_2 \frac{d\varphi}{dt}$

On obtient alors la relation du transformateur idéal de tension $u_2(t) = \frac{N_2}{N_1} u_1(t)$

L'approche simplifiée permet de mettre en évidence le rôle du transformateur idéal qui permet de modifier l'amplitude d'une tension sinusoïdale dans le réseau de transport de l'électricité.

La tension obtenue sur une prise domestique est de 220V alors que la tension le long des lignes de transport peut être bien plus importante de l'ordre de 10^5 - 10^6 V pour les lignes de transport nationales et internationales.

Pour une ligne de transport de résistance totale R, les pertes par effet joule sont exprimées par $P_J = RI^2$.

La puissance transmise s'exprimant par $P = U.I$, en augmentant la tension de transport, on diminue I à puissance transmise égale et on réduit donc la puissance P_J dissipée par effet joule lors du transport.

Pour ramener la tension à la valeur domestique, on utilise un réseau de transformateur au niveau régional, local puis dans chaque quartier, en abaissant à chaque fois la valeur de la tension.

Capacités exigibles

- Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface orientée plane
- Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes observés
- Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'alébrisation
- Décrire et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday
- Établir l'expression de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur et en connaître l'ordre de grandeur
- Différencier le flux propre du flux extérieur.
- Evaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur.
- Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
- Définir le coefficient d'inductance mutuelle entre deux circuits.
- Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ».
- Établir les équations différentielles régissant le comportement de deux circuits électriques couplés par mutuelle induction en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents ainsi que le système d'équations en régime sinusoïdal forcé.
- Établir la loi des tensions pour un transformateur idéal
- Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système de deux bobines en interaction.