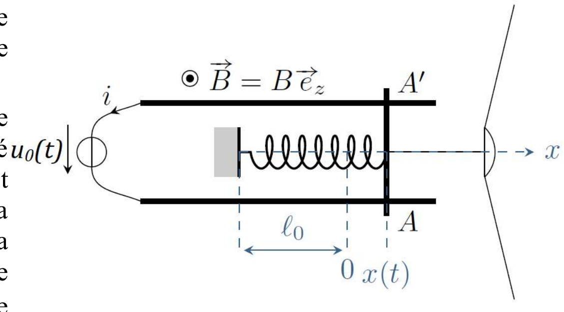
Exercice 1 : fonctionnement simplifié d'un haut-parleur



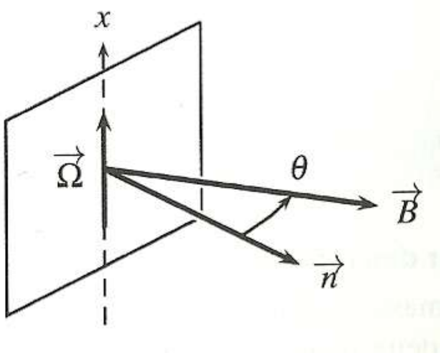
On propose ci-contre un modèle très simplifié de haut-parleur. Ce modèle n'est qu'une adaptation des rails de Laplace, dans laquelle la membrane du haut-parleur est fixée solidairement à la tige mobile.

La tige mobile, de longueur AA'=a, est reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k (ressort qui modélise l'élasticité de la membrane du haut-parleur). La position de la tige est repérée par son abscisse x, dont l'origine correspond à la position de repos du ressort.Les frottements de l'air sur la membrane se traduisent par une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$, on néglige en revanche tout frottement solide entre la tige et les rails.

Le circuit constitué des rails et de la tige est alimenté par un générateur imposant une tension variable $u_0(t)$. La résistance totale du circuit, supposée constante, est notée R. Le tout est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_O\,\vec{e}_z$ stationnaire et uniforme. On néglige l'auto-induction.

1. Expliquer qualitativement (i.e. sans équation !) le fonctionnement du haut-parleur.
2. Exprimer la f.é.m. induite « e » en fonction de $\dot{x}(t)$.
3. Écrire les équations électrique et mécanique.
4. Découpler ces équations pour aboutir à une unique équation différentielle portant sur la position x de la tige mobile. Quel type d'équation reconnaissez-vous ? Commentez.
5. Procéder à un bilan de puissance du système et interpréter physiquement chaque terme.

Exercice 2 : Moteur asynchrone.

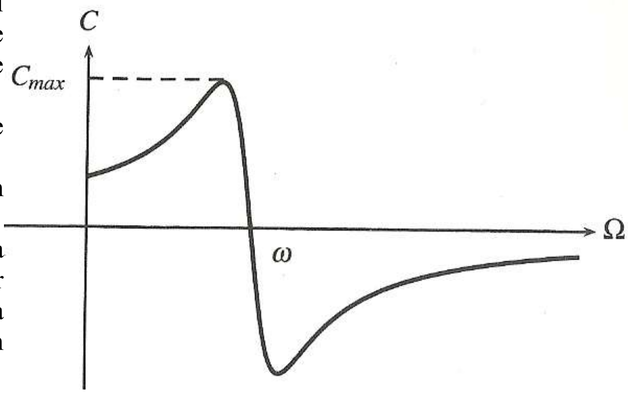


Une spire plate de résistance R, d'inductance (propre) L et de surface S, tourne à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe (Ox) vertical. La normale $\vec{n}$ à la spire est contenue dans le plan (Oyz). La spire est plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz), de norme constante, tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de (Ox). Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne la bobine.

1. Comment réaliser un champ magnétique tournant à partir d'un courant triphasé ?
2. Expliquer qualitativement pourquoi la spire est mise en rotation par le champ magnétique ? Les deux vitesses ω et Ω peuvent-elles être identiques ?
3. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de l'intensité du courant dans la bobine en faisant apparaître la pulsation de forçage du circuit.
4. Par passage aux notations complexes, obtenir l'expression de l'intensité. En déduire l'expression de l'intensité réelle (sous la forme Acos +Bsin).

On désigne par la notation$\vec{M}(t)$ le moment magnétique de la spire.

5. Exprimer le couple exercé par le champ magnétique sur la spire. En déduire sa valeur moyenne C(Ω).



L'allure de la courbe C(Ω) est donnée sur la figure ci contre. On suppose que la spire entraîne une charge mécanique appliquant un couple résistant constant de valeur absolue Γ.

6. La spire étant initialement immobile, le moteur peut-il démarrer ?

On suppose que le moteur est mis en rotation et qu'on atteint un régime permanent.

7. Déterminer graphiquement en fonction de la valeur de Γ la vitesse de rotation du moteur en régime permanent. On étudiera qualitativement la stabilité de ces régimes en cas d'indétermination.

Exercice 3 : Moteur à courant continu.

Une spire rectangulaire, de grand axe z'z, est enroulée sur un cylindre de même axe, de rayon a et de hauteur b (voir figures 1 et 2).
Cet ensemble (appelé rotor) se déplace dans l'entrefer d'un aimant. Le champ magnétique créé par cet aimant a une composante radiale B_r au niveau de l'entrefer dont la variation en fonction de la position dans l'entrefer est donnée par la figure 3. La composante verticale B_z du champ est nulle.
La spire de résistance R est connectée vers l'extérieur aux points A et C via un système balai-collecteur de manière à ce que le brin de spire situé à droite soit toujours en relation électrique avec A et celui situé à gauche soit en relation avec C quelle que soit la position de la spire dans l'entrefer (voir figure 2).
On notera J le moment d'inertie, par rapport à l'axe z'z du rotor et $\vec{\Omega}=\Omega.\vec{e}_z$ son vecteur rotation. On négligera les phénomènes d'auto-induction dans la spire. On notera i le courant traversant la spire orienté de A vers C.
Lors de la rotation, la spire est soumise à un couple de frottement fluide dont le moment est du type $C_f=-\beta\Omega$où β est une constante positive.

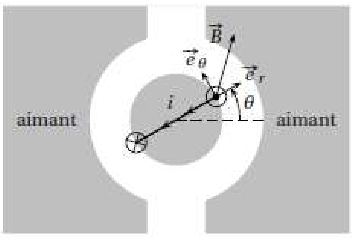


Figure 1

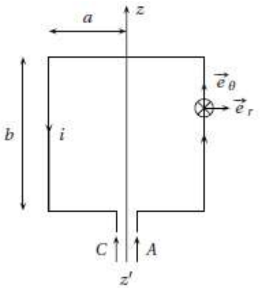


Figure 2

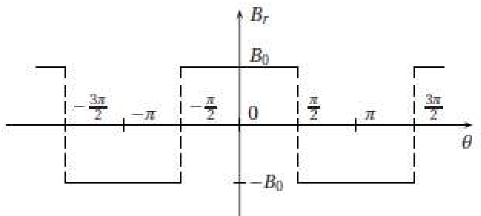


Figure 3

a. Etude générale.

On considère la surface S s'appuyant sur la spire constituée par le demi cylindre d'axe z'z, de hauteur b et de rayon a, telle que le vecteur normal orientant la surface latérale S_L du cylindre soit $\vec{e}_r$. On note S_+ le demi disque supérieur et S_- le demi disque inférieur complétant alors la surface S.

1. Effectuer une représentation graphique de la surface S, donner alors le vecteur normal orientant les surfaces S_+, S_- et S_L.
2. Montrer alors que le flux du champ magnétique à travers la surface S s'exprime $\varphi_S=ab\,B_O(2\theta)$.
3. Exprimer la force électromotrice e du générateur induit dans la spire en fonction de a,b,B_O et Ω.

On note Γ le moment de l'action de Laplace par rapport à l'axe z'z sur la spire.

4. Quelle relation lie la puissance de l'action de Laplace sur la spire et la puissance du générateur induit dans la spire ? En déduire la relation $\Gamma=2iabB_O$.

b. Principe d'une dynamo.

<u>Dans cette partie uniquement,</u> on suppose qu'un moteur entraine la spire en rotation à vitesse constante Ω_O. On modélise le système électrique connecté à la dynamo par une résistance de charge R_C.

5. Déterminer le circuit électrocinétique équivalent au système étudié et en déduire l'expression de l'intensité i_O dans le circuit en fonction des données énoncé. Ce courant est-il continu ou variable ?
6. Déterminer l'expression de Γ_m le couple exercé par le moteur mettant la dynamo en rotation.

c. Principe d'un moteur à courant continu.

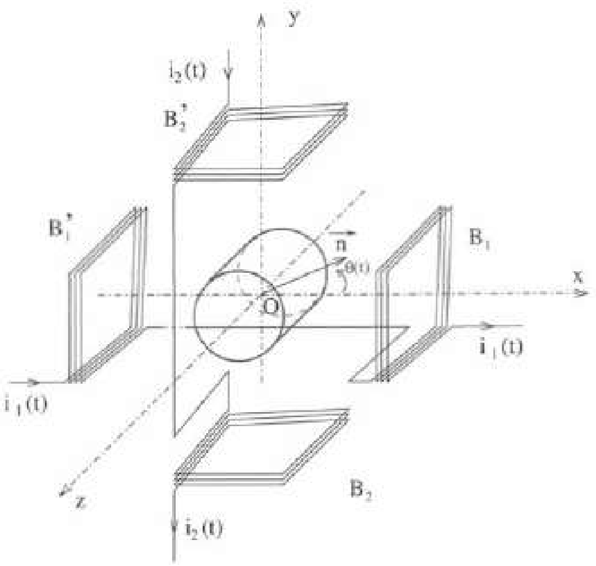
<u>Dans cette partie uniquement,</u> on suppose qu'un générateur électrique impose entre les bornes A et C une tension constante $V_A-V_C=E>0$. On modélise le système mécanique mis en rotation par le moteur par un couple résistant de charge $-C_C$ constant.

7. Mener l'étude mécanique du système pour établir une première équation différentielle liant β, Ω, i, J, b, a, B_O et C_C.
8. Mener l'étude électrique du système pour établir une seconde équation liant E, i, R, Ω, a, b et B_O.
9. En déduire que Ω vérifie une équation différentielle de la forme $\frac{d\Omega}{dt}+\frac{\Omega}{\tau}=\frac{\Omega_O}{\tau}$ et préciser les expressions des constantes τ et Ω_O en fonction de J, a, b, R, B_O, E et C_C.
10. On suppose que le moteur est initialement à l'arrêt. Déterminer l'expression de Ω(t), en faire une représentation graphique. Déterminer l'expression de l'instant $t_{95\%}$ à partir duquel la vitesse de rotation atteint sa valeur limite à 5% près.

Exercice 4 : Etude d'un alternateur.

Le dispositif étudié est un alternateur, élément d'une éolienne individuelle telle qu'elle peut être installée par un particulier de nos jours. Lorsqu'elle fonctionne de manière optimale, elle fournit une puissance électrique P_N = 6,00 kW. Le diamètre de ses pales est de 5,60 m, la vitesse de rotation moyenne est de 150 tours/min. Le vent fait tourner les pales de l'éolienne qui entraînent le rotor de la machine, qui crée alors de l'électricité.

Le rotor est un solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation (Oz). Il est constitué de 100 aimants NdFeB (Néodyme-Fer-Bore) parallélépipédiques de dimensions (3cm x 3cm x 2cm), d'aimantation $M_A = 1{,}00.10^6$ A.m^{-1}, il est donc assimilable à un aimant permanent, on note alors $\vec{M} = M.\vec{n}$ son moment magnétique, où M est la norme de ce moment magnétique et $\vec{n}$ le vecteur unitaire tournant contenu dans le plan xOy, repéré par l'angle θ(t) qu'il fait avec l'axe (Ox). Le rotor crée dans son environnement un champ magnétique qu'on note $\vec{B}_r$.



Le stator de l'alternateur est constitué de deux associations de bobines (B_1, B_1') et (B_2 ,B_2'), toutes identiques. L'association (B_1, B_1') est orientée selon la direction et le sens de l'axe (Ox) alors que l'association (B_2 ,B_2') est orientée selon la direction et le sens de l'axe (Oy) (voir figure ci-contre).

Chaque association de bobines forme un circuit qui est fermé sur une charge de résistance R_C, chacune des bobines présentent une résistance r = 1 Ω et une inductance propre L = 0,2 mH (voir figure ci-contre).

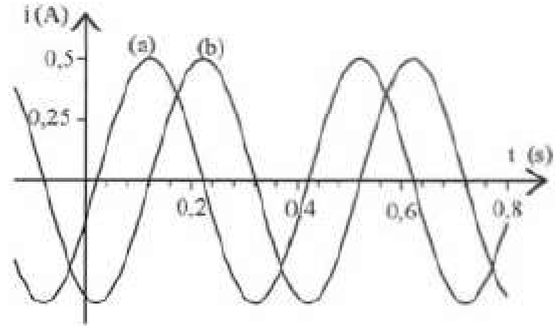
Dans ce problème, nous ne nous intéressons qu'au fonctionnement de l'alternateur en régime permanent, c'est-à-dire lorsque la vitesse de rotation du rotor est une constante positive notée Ω. L'origine des temps est alors choisie de telle sorte que θ(t) = Ωt.
Dans la configuration du système étudié, le champ magnétique $\vec{B}_r$ crée un flux total à travers les bobines (B_1, B_1') qu'on notera $\Phi_1(t) = \Phi_O \vec{n}.\vec{e}_x$ et un flux total à travers les bobines (B_2 ,B_2') qu'on notera $\Phi_2(t) = \Phi_O \vec{n}.\vec{e}_y$

1. Exprimer en fonction de Φ_O, Ω et t les forces électromotrices induites $e_1(t)$ et $e_2(t)$ dans les bobines.
2. Représenter le schéma électrique équivalent au circuit contenant l'ensemble (B_1, B_1') et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i_1(t)$ du courant qui y circule. Ecrire également l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i_2(t)$ du courant circulant dans l'autre circuit.
3. En utilisant les notations complexes, déterminer les amplitudes complexes de ces deux intensités puis montrer que les intensités dans les deux circuits peuvent s'écrire sous la forme :

$$i_1(t) = I_m(\Omega)\cos\left(\Omega t - \pi/2 - \varphi\right) \text{ et } i_2(t) = I_m(\Omega)\cos(\Omega t - \pi - \varphi)$$

Où on exprimera $I_m(\Omega)$ et φ en fonction des données de l'énoncé. (φ sera pris sur l'intervalle]-π/2 ; π/2[ ).

Les courbes (a) et (b) présentées sur la figure ci contre. sont celles des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.



4. Le courant $i_1(t)$ est-il en avance ou en retard sur $i_2(t)$? En déduire la correspondance entre les courbes (a) et (b) d'une part et les intensités d'autre part.
5. Déterminer à partir des courbes la vitesse de rotation du rotor. Comparer cette valeur à la vitesse de rotation du fonctionnement optimal.
6. Exprimer la puissance électrique $P_{G,1}(t)$ délivrée par le générateur induit dans le circuit contenant l'association de bobines (B_1, B_1'). Exprimer de même $P_{G,2}(t)$ pour le circuit contenant l'association de bobines (B_2 ,B_2'). Montrer alors que P_G la puissance totale induite dans le circuit est une constante qu'on exprimera en fonction de Φ_O, Ω, L R_C, r et φ.

On s'intéresse maintenant à l'étude mécanique du rotor :

- L'action mécanique engendrée sur le rotor par le vent est modélisée par un couple moteur par rapport à l'axe (Oz) qu'on supposera constant et qui sera noté $\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m . \vec{e}_Z$.
- La liaison pivot de ce rotor par rapport à l'axe (Oz) est supposée idéale.

On admet que l'association de bobines (B_1, B_1') crée au niveau du rotor un champ magnétique $\vec{B}_1 = k . i_1(t) . \vec{e}_x$ et que l'association (B_2,B_2') crée au niveau du rotor un champ magnétique $\vec{B}_2 = k . i_2(t) . \vec{e}_y$.

7. En déduire que $\vec{B}_{1+2}$ le champ total créé par les bobines est un champ d'amplitude constante qu'on exprimera en fonction de k, Φ_O, Ω, L R_C, r, tournant à la vitesse angulaire Ω et présentant un retard angulaire α constant par rapport au rotor dont on donnera l'expression en fonction de φ.
8. Exprimer Γ_{1+2} le couple par rapport à l'axe (Oz) de l'action mécanique de Laplace exercée par ce champ sur le rotor en fonction de k,M, Φ_O, Ω, L R_C, r et φ.
9. En déduire l'expression du couple moteur Γ_m exercé sur le rotor (justifier le signe obtenu) puis l'expression de la puissance mécanique motrice P_m.
10. Effectuer un bilan de puissance sur le système et en déduire qu'on a forcément $\Phi_O = k.M$. Contrôler l'homogénéité de cette relation.

Applications numériques : Les résistances de charge présentent une valeur numérique $R_C = 24$ kΩ.

11. Exprimer puis évaluer numériquement les intensités efficaces dans chacun des circuits. On rappelle à toute fin utile que $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
12. Calculer la valeur numérique du flux Φ_O correspondant au fonctionnement optimal de l'éolienne.
13. Evaluer numériquement le moment magnétique M du rotor puis le coefficient k.
14. En déduire l'intensité du champ magnétique tournant $\vec{B}_{1+2}$.