Exercice 1 : Rayonnement, réaction de rayonnement

Q0. * $\langle \cos^2(\omega t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos^2(\omega t)\, dt$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ $\qquad = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\cos(2\omega t)+1}{2}\, dt$

$= \frac{1}{2T}\int_t^{t+T} \cos(2\omega t)\, dt + \frac{1}{2T}\int_t^{t+T} dt$

$= \frac{1}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_t^{t+T} + \frac{1}{2T}(\cancel{t} + T - \cancel{t})$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad = \frac{1}{8\pi}\left(\sin(2\omega(t+T)) - \sin(2\omega t)\right) + \frac{1}{2}$

$\to 0$

$= \frac{1}{2}$

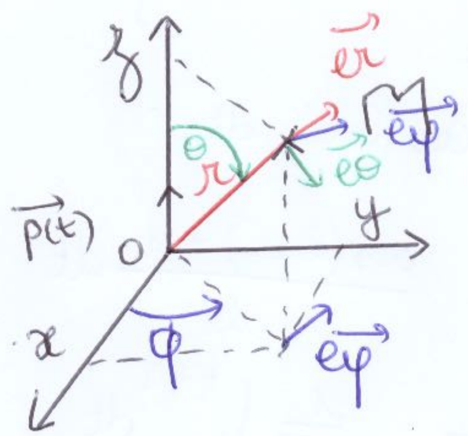
* En coordonnées sphériques :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{dl} &= dr\, \vec{e_r} + r d\theta\, \vec{e_\theta} + r\sin\theta d\phi\, \vec{e_\phi} \\ d^3V = dV &= dr \times r d\theta \times r\sin\theta d\phi \\ \vec{d^2S} = \vec{dS} &= r d\theta \times r\sin\theta d\phi\, \vec{e_r} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{e_r} \end{aligned}}$$

Q1. "très éloigné" est équivalent à $r \gg d$

(Rq : il faut aussi $r \gg \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg d$)

Q2.



$$\vec{B}(M) = \begin{vmatrix} \cancel{B_r(r,\theta,\phi,t)} \\ \cancel{B_\theta(r,\theta,\phi,t)} \\ B_\phi(r,\theta,\cancel{\phi},t) \end{vmatrix}$$

Par le Principe de Curie, le champ magnétique

→ a les invariances de

→ est orthogonal au plan de symétrie de la distribution des courants sources.

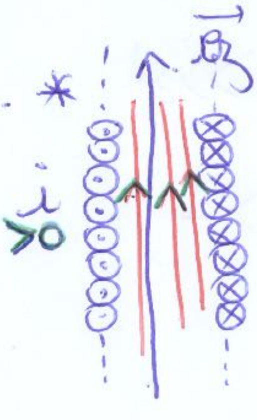
invariance par rotation selon ϕ

$(\vec{e_r}, M, \vec{e_\theta})$ est un plan de symétrie

donc $\vec{B}(M) = B_\phi(r,\theta,t)\,\vec{e_\phi}$

Rq : ce qui est cohérent avec l'expression donnée à la question suivante...

Q3. *



$\vec{B_\infty} = \mu_0 n i \vec{e_z}$

n spires par unité de longueur

donc $[B] = [\mu_0]\frac{I}{L}$

* $\left[\vec{B}\right] = \left[\dfrac{\mu_0 e d \omega^2}{4\pi c} \dfrac{\sin\theta}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_r}\right]$

$= [\mu_0] \dfrac{[ed] \cancel{L} T^{-2}}{\cancel{L} T^{-1}} \dfrac{1}{L} \times 1$

$= [\mu_0] [e] \dfrac{T^{-1}}{L}$

or $i = \dfrac{dq}{dt}$

$\Leftrightarrow [e] = I T$

$= [\mu_0] I \cancel{T} \dfrac{\cancel{T^{-1}}}{L}$

$= [\mu_0] \dfrac{I}{L}$

* $1 G = 10^{-4} T$

Gauss ↑ ↑ Tesla

Q4. $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$= \dfrac{1}{\cancel{\mu_0}} \times \left(\dfrac{e d \omega^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \dfrac{\sin\theta}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_\theta} \right.$

$\wedge$

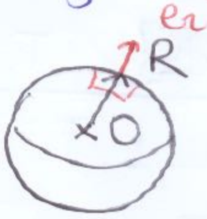
$\left. \dfrac{\cancel{\mu_0} e d \omega^2}{4\pi c} \dfrac{\sin\theta}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_\phi} \right)$

$= \dfrac{e^2 d^2 \omega^4}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \dfrac{\sin^2\theta}{r^2} \left(\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\right)^2 \vec{e_r}$

car $\vec{e_\theta} \wedge \vec{e_\phi} = +\vec{e_r}$

Q5.

$$\Psi = \oiint_{S/(\mathcal{C})} \vec{\pi}\cdot\vec{d^2S}$$ par définition d'un flux



$\vec{\pi}(R)$ est tracé en Q4.

$\vec{d^2S} = R^2 \sin\theta \, d\phi \, d\phi \, \vec{e_r}$
d'après Q1.

donc

$$\underline{\Psi} = \frac{e^2 d^2 \omega^4}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \oiint \frac{\sin^2\theta}{\cancel{R^2}} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right) \times \cancel{R^2} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \; \underbrace{\vec{e_r}\cdot\cancel{\vec{e_r}}}_{1}$$

$$= \frac{e^2 d^2 \omega^4}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right) \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{=\frac{4}{3}} \times \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

d'après l'indication

$$= \frac{e^2 d^2 \omega^4}{\varepsilon_0 c^3} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right) \times \frac{1}{4^{\cancel{2}}\pi^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{4}}{3} \times 2\cancel{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{e^2 d^2 \omega^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \cos^2\left(\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)}$$

Q6. $$\underline{\langle \Psi \rangle_T} = \frac{e^2 d^2 \omega^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \left\langle \cancel{\cos^2\left(\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right)} \right\rangle_T \xrightarrow{} 1/2$$ d'après Q0.

$$= \boxed{\frac{e^2 d^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}}$$

Q7. a) $\overrightarrow{OP} = d\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}$$

$$= -\omega^2 d\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

Q7. b) c) * $\langle \vec{\gamma}.\vec{\gamma} \rangle = +\omega^4 d^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t)\rangle}_{1/2} \underbrace{\overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_z}}_{1}$

$$= \frac{\omega^4 d^2}{2}$$

* $\langle \psi \rangle_T = \mathcal{P}_L$

$$\Leftrightarrow \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{d^2\omega^4}{2} = K_e \langle \vec{\gamma}.\vec{\gamma} \rangle$$

donc par identification $\boxed{K_e = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}$

* $$[K_e] = \frac{[\mathcal{P}_L]}{[\langle \vec{\gamma}.\vec{\gamma} \rangle]} = \frac{M\cancel{L^2}T^{-3}}{(\cancel{L}T^{-2})^2} = M.T$$

car $[\mathcal{P}] = [\vec{F}.\vec{v}] = MLT^{-2}.LT^{-1} = ML^2T^{-3}$

K_e en kg.s

Q8. a) $\underline{P_{ray}} = \vec{f_{ray}} \cdot \vec{v}$ par définition

$$= \vec{f_{ray}} \cdot \frac{d\vec{OP}}{dt}$$

Q8. b)

$$\langle P_{ray} \rangle = \left\langle \vec{f_{ray}} \cdot \frac{d\vec{OP}}{dt} \right\rangle$$

$$= \left\langle K_e \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \cdot \frac{d\vec{OP}}{dt} \right\rangle$$

avec

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = -d\omega \sin(\omega t)\,\vec{e_z}$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = +d\omega^3 \sin(\omega t)\,\vec{e_z}$$

donc $\underline{\langle P_{ray} \rangle} = -K_e d^2 \omega^4 \langle \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{1/2} \rangle \underbrace{\vec{e_z} \cdot \vec{e_z}}_{1}$

$$= \frac{-K_e d^2 \omega^4}{2} < 0$$

~~Calculer~~

La force est résistive

Q9. PFD électron (m_e) $\mathcal{R}_{Terrestre}$ considéré galiléen

$$m_e \vec{\gamma} = \vec{f_{rappel}} + \vec{f_{ray}}$$

$\cdot \vec{e_z}$

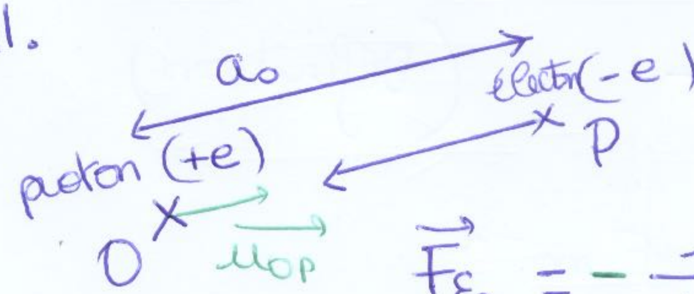
$$m_e \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 z(t) + K_e \frac{d^3 z(t)}{dt^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^3 z(t)}{dt^3} - \frac{m_e}{K_e} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} - \frac{m_e}{K_e} \omega_0^2 z(t) = 0$$

d'ordre 3

Q10. $a_{\text{atome}} \simeq 1 \text{Å} = 10^{-10}\,m$

Q11.



$$\overrightarrow{F_{\varepsilon_0}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2}\,\overrightarrow{u_{OP}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2}\,\frac{\overrightarrow{OP}}{a_0}$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{OP}}{a_0^3}$$

Q12. $$\overrightarrow{F_{\text{Lorentz}}} = -e\overrightarrow{E}$$

$$= -e \times \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\overrightarrow{OP}}{a_0^3}$$

$$= \overrightarrow{F_{\varepsilon_0}}$$ ce qui est cohérent.

Q13. a) $$\overrightarrow{f_{\text{rappel}}} = \overrightarrow{F_{\text{Lorentz}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-}\,m_e\,\omega_0^2\,\overrightarrow{OP} = \boxed{-}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\,\overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow \underset{>0}{\omega_0} = +\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 m_e}}$$ par identification

Q13. b) $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C$ Charge élementaire

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,kg$ Masse de l'électron

$\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$ (Définition)

Q13. c) ε_0 est en $F.m^{-1}$

Q13. d)

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{\sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 m_e}}}$$

$$= \frac{2\pi \times 3{,}0 \times 10^8}{\sqrt{\dfrac{(1{,}6\times10^{-19})^2 \times 9\times10^9}{(10^{-10})^3 \times 9{,}1\times10^{-31}}}} \approx 1\times10^{-7}\,m \quad (\approx 100\,nm)$$

$\lesssim 400\,nm$
il s'agit d'un rayonnement UV

Q14. PFD électron (m_e) $R_{Terrestre}$ considéré galiléen

$$m_e \vec{\gamma} = \vec{f_{ray}} + \vec{f_{rappel}} - e\vec{E_{ext}}$$

$\cdot \vec{e_z}$ $$m_e \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = Ke \frac{d^3 z(t)}{dt^3} - m_e \omega_0^2 z(t) - eE_0 \cos(\omega t)$$

Q15. $$P(\omega) = \frac{\frac{\tau}{2m_e}\left(\omega^2 e E_0\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\tau\omega^3\right)^2} \quad \text{avec } \tau = \frac{K_e}{m_e}$$

$$* \; P_0 = P(\omega_0) = \frac{\frac{\tau}{2m_e}\left(\omega_0^2\, eE_0\right)^2}{\underbrace{\cancel{\left(\omega_0^2-\omega_0^2\right)^2}}_{0}+\left(\tau\omega_0^3\right)^2} = \frac{\left(eE_0\right)^2}{2m_e\,\tau\,\omega_0^2}$$

$$* \; P(\omega \ll \omega_0) \approx \frac{\frac{\tau}{2m_e}\left(\omega^2 eE_0\right)^2}{\omega_0^4} = \frac{\tau\left(eE_0\right)^2}{2m_e}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

$$* \; P(\omega \gg \omega_0) \approx \frac{\frac{\tau}{2m_e}\left(\omega^2 eE_0\right)^2}{\tau^2\omega^6} = \frac{\left(eE_0\right)^2}{2m_e\tau}\cdot\frac{1}{\omega^2}$$

$$* \; P(0) = 0$$

$$* \; \lim_{\omega\to+\infty} P(\omega) = 0$$

Q16.a) $* \; P(\omega_R)$ max $\Leftrightarrow \left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2$ min

$\Leftrightarrow \omega_R = \omega_0$

$$* \; \underset{\text{(cours)}}{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}} = \underset{\text{(énoncé)}}{\frac{\cancel{\omega_0}}{\tau\omega_0^{\cancel{2}}}} = \frac{1}{\tau\omega_0}$$

Q16. b) $\omega_0 = \left(\frac{2\pi c}{\lambda_0}\right)$

en optique, on peut prendre $\lambda_0 \approx 500\times10^{-9}\,m$

car $400_{nm} < \lambda_{visible} < 800\,nm$.

$$* \ \Delta\omega = \tau\,\omega_0^2 = \frac{K_e}{m_e}\left(\frac{2\pi c}{\lambda_0}\right)^2 = \frac{5{,}75\times10^{-54}}{9{,}1\times10^{-31}} \times \left(\frac{2\pi\times3{,}0\times10^{8}}{500\times10^{-9}}\right)^2$$

$$\approx 9\times10^{7} \ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$* \ Q = \frac{1}{\tau\,\omega_0} = \frac{1}{\frac{K_e}{m_e}\left(\frac{2\pi c}{\lambda_0}\right)} = \frac{1}{\frac{5{,}75\times10^{-54}}{9{,}1\times10^{-31}} \times \frac{2\pi\times3{,}0\times10^{8}}{500\times10^{-9}}}$$

$$\approx 4\times10^{7}$$

Rq : $\tau\omega_0$ est bien $\ll 1$.