

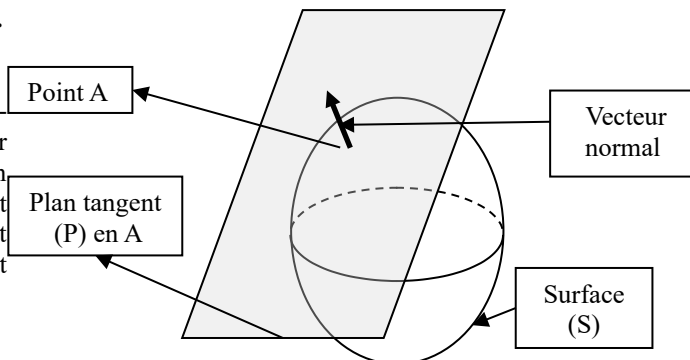
Réflexion et réfraction sur un dioptre.

1. Lois de Snell Descartes.

1.1. Quelques éléments de géométrie.

a. Plan tangent et normale à une surface.

On considère une surface (S) « régulière », c'est-à-dire ne présentant pas de « coins », prenant par exemple une coquille d'œuf, et prenons A un point de la surface. On peut voir le plan tangent (P) à la surface (S) en A comme le plan venant « toucher » la surface (S) en A sans qu'il n'y ait d'autres intersections entre (S) et (P).



Définition : Il existe une unique droite passant par A et perpendiculaire au plan (P) (c'est-à-dire perpendiculaire à toutes droites contenues dans le plan (P)). Cette droite est appelée **la normale en A à la surface (S)**.

La normale est une droite, on peut donc la caractériser à l'aide d'un vecteur directeur $\vec{n}$ qui prend le nom de vecteur normal à la surface (S) en A. Pour ce vecteur donnant la direction de la droite normale, il reste un choix sur le sens, sur l'illustration, on a choisi de prendre $\vec{n}$ dans le sens « sortant » de la surface (S).

b. Plan d'incidence.

Sur cette géométrie, vient s'ajouter un rayon lumineux incident à la surface (S) en A.

Définition : On définit le plan d'incidence comme le plan contenant le rayon lumineux arrivant en A et la droite normale à la surface (S) en A.

On peut réduire la représentation du système à deux dimensions dans le plan d'incidence.

1.2. Énoncé des lois de Snell Descartes.

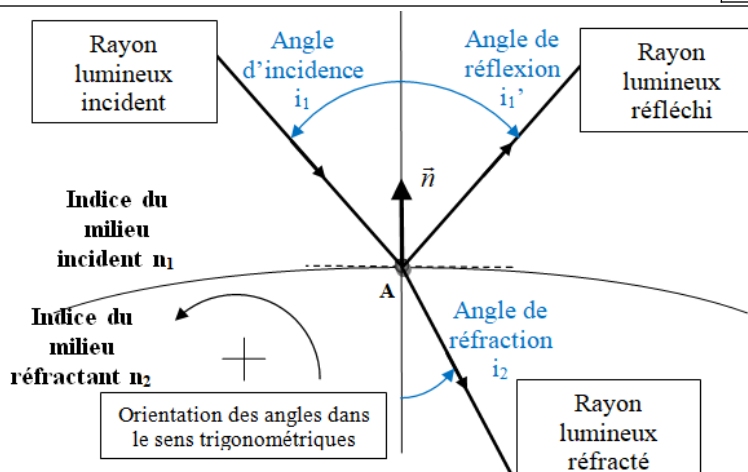
A l'interface entre deux milieux (1) d'indice optique n_1 et (2) d'indice optique n_2 , un rayon incident dans le milieu (1) donne en général naissance à un rayon réfléchi vers le milieu (1) et un rayon réfracté dans le milieu (2), encore appelé rayon transmis.

Les lois de Snell-Descartes pour la réflexion s'énoncent alors :

- ✓ Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.
 - ✓ Le rayon réfléchi est symétrique du rayon incident par rapport à la normale, autrement dit, l'angle de réflexion que fait le rayon réfléchi avec la normale à la surface est de même valeur absolue et de signe opposé.
- $$i_1' = -i_1$$

Les lois de Snell-Descartes pour la réfraction s'énoncent alors :

- ✓ Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.
- ✓ L'angle de réfraction que fait le rayon réfracté avec la normale à la surface vérifie : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

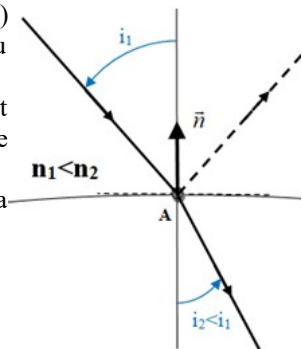


1.3. Application directe : angle limite de réfraction, phénomène de réflexion totale.

a. Observation des deux cas possibles.

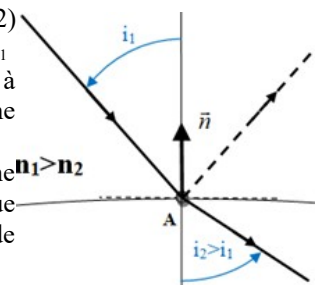
On observe que si on passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 tels que $n_2 > n_1$, (2) étant alors dit plus réfringent que (1), le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre : $i_2 < i_1$

- On voit alors qu'il y a une limite à ce processus, puisque l'angle d'incidence doit être inférieur à $\pi/2$. Il existe alors une valeur limite i_L qui ne pourra pas être dépasser par l'angle de réfraction.
- Pour déterminer l'angle limite de réfraction, on utilise les lois de Descartes sur la réfraction.



A l'inverse, si on passe d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 tels que $n_2 < n_1$, (2) étant dit moins réfringent que (1), le rayon réfracté s'éloigne de la normale au dioptre : $i_2 > i_1$

- Il y a une limite à ce processus, puisque l'angle de réfraction doit être inférieur à $\pi/2$. Au delà de la valeur limite i_L pour l'angle d'incidence, le rayon réfracté ne peut pas exister, on observe alors uniquement un rayon réfléchi.
- On observe alors le phénomène de réflexion totale si l'angle d'incidence prend une valeur supérieure à i_L qui conserve son nom d'angle limite de réfraction puisque c'est la même valeur que dans le premier cas selon le principe de retour inverse de la lumière.



b. Détermination de l'angle limite de réfraction.

On suppose par exemple que $n_2 < n_1$, l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence et vérifie $i_1 < i_2 \leq \frac{\pi}{2}$

alors $\sin(i_2) \leq 1$ et la loi de Snell Descartes implique $\sin(i_1) \leq \frac{n_2}{n_1}$.

On pose alors i_L tel que $\sin(i_L) = \frac{n_2}{n_1}$ il s'exprime alors $i_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Propriété :

- Lorsqu'on passe un dioptre dans le sens (1) vers (2) tel que $n_2 < n_1$, il existe un angle d'incidence limite i_L au delà duquel la réfraction est impossible. Au delà de cette limite, on observe le phénomène de réflexion totale.
- A l'inverse lorsqu'on passe de (2) vers (1), il existe toujours un angle réfracté mais l'angle de réfraction sera inférieur à la valeur limite i_L .
- On montre que l'angle limite de réfraction s'exprime $i_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ (démonstration ci-dessus à connaître)

AD1 : les grenouilles maîtrisent les lois de Snell-Descartes !

Quand elles sentent le danger, certaines grenouilles plongent et se cachent sous un nénuphar. On modélise ce nénuphar par un cercle de rayon R flottant à la surface de l'eau dont on prendra l'indice optique comme étant égal à $n = 1,33$. On supposera que l'air est d'indice unitaire.

1. A l'aide d'un schéma, justifier que la région de l'espace qui délimite la « cachette parfaite » est un cône dont le nénuphar constitue la base et dont on déterminera le demi-angle au sommet i_L .
2. Déterminer la hauteur du cône. Faire l'application numérique pour un nénuphar de 10 cm de rayon.

1.4. Exemple d'application concrète : étude d'une fibre multimodale à saut d'indice.

Est-il besoin de signaler l'importance prise par la fibre optique dans le monde moderne des communications ?

- En théorie le déploiement de la fibre optique en France (métropolitaine) dans tous les foyers français est réalisé depuis 2025. La carte disponible sur internet montre que l'objectif n'est pas encore tout à fait atteint.

<https://cartefibre.arcep.fr>

- La technologie fibre optique est toujours en évolution, on indique sur le schéma suivant, les trois types de fibres à connaître pour sa culture générale.

http://igm.univ-mlv.fr/~dr/XPOSE2009/Transmission_sur_fibre_optique/types.html

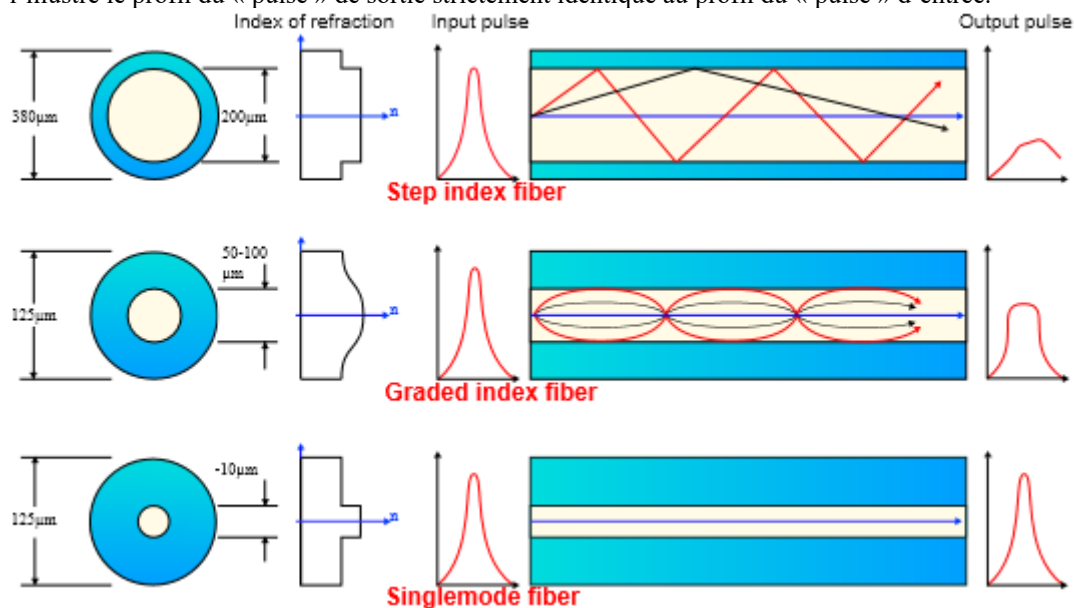
- ✓ La fibre à saut d'indice, appelée aussi fibre multimodale à saut d'indice, est celle que nous allons particulièrement étudier par la suite. Elle est composée d'une âme (ou cœur) en silice (c'est-à-dire du verre) dopée pour augmenter son indice optique, de rayon $a \approx 100 \mu\text{m}$, dans laquelle la lumière est guidée en exploitant le phénomène de réflexion totale sur l'interface avec la gaine en silice pure dont l'indice optique est alors légèrement inférieur à celui de l'âme, de rayon $b \approx 200 \mu\text{m}$. Le tout est en général entouré d'une gaine de protection en plastique simple. On notera le faible écart d'indice entre l'âme et la gaine. Les valeurs typiques qu'on utilisera par la suite sont : (pour l'âme ou cœur) $n_1=1,500$, (pour la gaine) $n_2=1,485$.
- ✓ La fibre à gradient d'indice est une évolution de la situation précédente, au lieu de faire varier brusquement l'indice entre une valeur d'âme et une valeur de gaine, on conçoit une fibre dont l'indice évolue de manière continue entre une valeur maximale au centre vers une valeur minimale à l'extérieur.

Comme l'illustre la figure ci-dessous la trajectoire de la lumière dans la fibre n'est plus alors un ensemble de segments rectilignes comme dans la fibre à saut d'indice, mais une ligne courbe, dont on peut démontrer qu'elle s'approche par un profil spatial de type sinusoïdal.

L'avantage principal de ce type de fibre est la plus faible dispersion (intermodale) de la lumière dans la fibre, également illustrée sur la figure : A partir d'une impulsion en entrée qui présente un même profil plutôt étroit, on observe en sortie de la même longueur de fibre que l'impulsion s'est étalée fortement dans le temps pour la fibre à saut d'indice alors qu'elle s'est faiblement étalée pour la fibre à gradient d'indice.

Ceci permet une plus faible distorsion de l'information numérique codée par des bits transmis physiquement par des impulsions lumineuses.

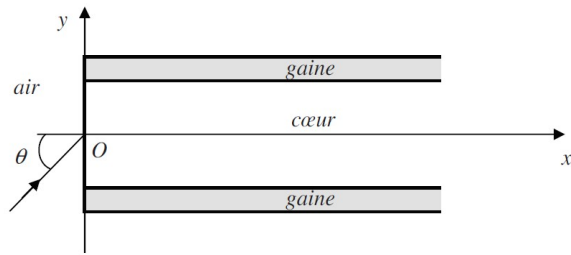
- Encore plus récemment, la fibre monomodale a été mise au point, elle reprend l'idée d'une constitution d'un canal guidant la lumière par saut d'indice entre une âme et une gaine, mais son âme présente un rayon beaucoup plus faible. La nature ondulatoire de la lumière, qui n'est pas au programme de première année, permet alors d'expliquer pourquoi le seul mode de transport de la lumière dans la fibre se fait selon l'axe de cette fibre sans aucune dispersion angulaire du faisceau lumineux transmis. Une seule trajectoire est alors possible dans la fibre monomodale et la dispersion « intermodale » est alors totalement annulée comme l'illustre le profil du « pulse » de sortie strictement identique au profil du « pulse » d'entrée.



Exercice d'application du cours sur la fibre à saut d'indice :

Revenons maintenant à l'étude de la fibre à saut d'indice. On souhaite étudier deux aspects particulièrement importants pour la mise en œuvre de cette fibre :

Tout d'abord, on va s'intéresser au problème de l'injection de la lumière dans la fibre optique. On note θ l'angle d'incidence d'un rayon lumineux provenant de l'air d'indice optique supposé unitaire $n_0=1,000$. On envisage sa réfraction dans l'âme (appelé aussi cœur) de la fibre d'indice optique $n_1=1,500$. On prendra pour indice optique de la gaine $n_2=1,485$.



1. Existe-t-il une condition sur l'angle d'incidence θ pour qu'un rayon réfracté soit produit dans le cœur de la fibre ?
2. Pour que la lumière soit guidée dans la fibre, quel phénomène physique va-t-on exploiter ?
3. Construire un schéma avec des rayons lumineux en trait plein décrivant la situation limite entre la situation de guidage dans la fibre et la situation d'atténuation du faisceau au cours de sa propagation. Représenter en traits pointillés un exemple de situation de non guidage. Conclure qu'il existe une valeur maximale de l'angle θ qu'on notera $\theta_{\max}$ en dessous de laquelle la lumière est guidée dans la fibre. Expliquer alors le nom de demi angle au sommet donné à cet angle $\theta_{\max}$.

On définit l'ouverture numérique NA de la fibre optique comme étant le sinus de $\theta_{\max}$.

4. Déterminer les expressions de $\theta_{\max}$ et de NA en fonction de n_0 , n_1 et n_2 . Faire les applications numériques.

On s'intéresse maintenant à la dispersion intermodale de cette fibre, c'est-à-dire à l'étalement temporel subi par une impulsion lumineuse entrant dans la fibre.

5. Décrire le plus court chemin possible suivi par la lumière transmise le long de la fibre. Décrire également le plus long chemin. Déterminer alors la distance minimale $d_{\min}$ et la distance maximale $d_{\max}$ pour une fibre de longueur L .

On considère une impulsion lumineuse très courte dont la durée est négligeable devant les autres temps caractéristiques du problème. On injecte cette impulsion lumineuse en entrée de la fibre de longueur L .

6. Montrer que cette impulsion va être étalée spatialement et temporellement au cours de sa propagation dans la fibre. Déterminer la largeur temporelle Δt de l'impulsion à la sortie de la fibre.

On suppose maintenant qu'une impulsion correspond à un bit d'information.

7. Quelle est la durée minimale δt qui doit s'écouler entre l'envoi dans la fibre de longueur L de deux impulsions successives ? Quel est alors le débit maximal théorique $D_{\max}$ de cette fibre ?

On trouve dans l'article suivant une référence de débit de $D=50\text{Mb/s}$ pour une fibre multimode à saut d'indice.

http://olivier.sigwarth.free.fr/CoursTS2/Cours%20Fibres%20Optiques/Fibres_Optiques.pdf

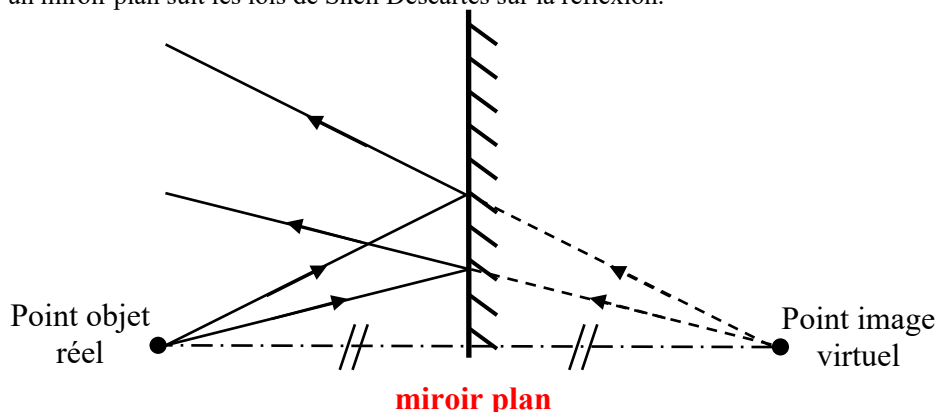
8. Quelle est la longueur maximale de la fibre utilisée dans le type d'installation décrit dans cet article ? Commenter la valeur numérique obtenue.
9. Comment peut-on procéder pour transporter de l'information avec de plus grand débit sur de plus grande distance ?

2. Construction d'un point image.

Méthode générale : Pour construire le point image associé à un point objet à travers un système optique, on construit plusieurs rayons lumineux incidents passant par le point objet et les rayons lumineux associés émergeant du système optique. Le point image est alors à l'intersection des rayons lumineux émergeant.

2.1. Par réflexion sur un miroir plan. Stigmatisme rigoureux.

La réflexion sur un miroir plan suit les lois de Snell Descartes sur la réflexion.



- On constate tout d'abord que tous les rayons lumineux incidents passant par le point objet génèrent un rayon lumineux émergeant passant par un unique point qu'on désigne alors comme point image. On dit que le miroir plan est un système optique rigoureusement stigmatique pour n'importe quel couple de points.

Définition : Un système optique est dit **stigmatique** pour un couple de points A et A' si et seulement si A et A' sont conjugués par le système optique.

Formulation équivalente : Tout rayon lumineux incident sur le système optique passant par A, génère un rayon lumineux émergeant passant par A'.

- On constate également le résultat suivant à retenir : **Le point image par un miroir plan est le symétrique du point objet par le plan du miroir.**
- On constate également que les rayons lumineux émergeant ne se croisent pas réellement mais qu'il faut envisager leurs prolongements virtuels pour obtenir le point d'intersection désigné comme point image. **On dit alors que le point image est virtuel. Il ne peut pas être observé sur un écran de projection.**

AD2 : miroir, mon beau miroir.

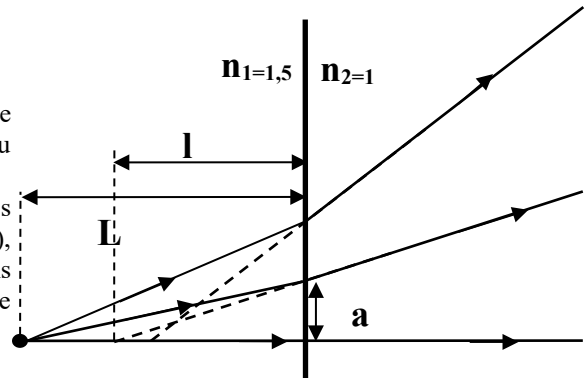
Les miroirs domestiques sont des lames de verre dont la face arrière, recouverte d'un dépôt métallique est une surface entièrement réfléchissante. On négligera l'épaisseur de verre et on supposera que la réflexion des rayons lumineux s'effectue directement sur le dépôt métallique.

- A l'aide d'un schéma, montrer que l'on voit un point A dans un miroir si et seulement si la droite (OA') coupe la surface du miroir, avec A' l'image de A par le miroir plan et O la position de l'œil observateur.
- En déduire la taille T minimale d'un miroir dans lequel un homme de taille h peut se voir en entier et déterminer la hauteur à laquelle doit se situer le bas du miroir.

2.2. Par réfraction à travers un dioptre plan. Stigmatisme approché.

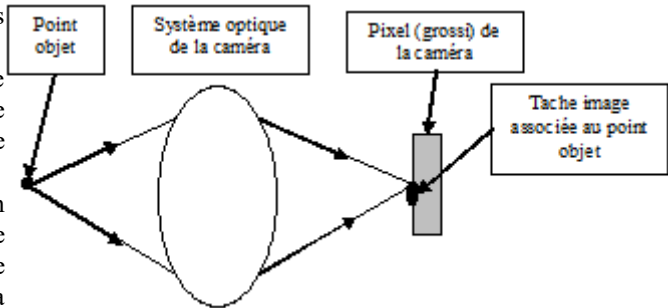
La réfraction par le dioptre plan suit les lois de Snell Descartes associés.

- On constate tout d'abord qu'il n'est pas possible d'identifier clairement un unique point image associé au point objet étudié.
- Cependant, si on limite la construction géométrique à des angles d'incidences faibles (de l'ordre de 10° en théorie), on peut déterminer une zone dans laquelle les rayons émergeant se croisent. On parle alors de tache image associée à un point objet.



Pour finir la détermination de l'image par réfraction sur un dioptre plan, on doit considérer les caractéristiques des détecteurs optiques. Prenons l'exemple d'une caméra CCD dont chaque pixel présente une taille caractéristique de $10\mu\text{m}$ (valeur approchée pour les caméras les plus modernes).

- Tant que la tache image sur le détecteur reste de dimension plus faible que celle du pixel, on ne peut pas la distinguer d'un point image parfaitement ponctuel.
- En conséquence, il n'est pas nécessaire qu'un système optique soit parfaitement stigmatique pour qu'on puisse définir un point image associé à un point objet mais il suffit que la tache image autour de ce point image reste de dimension raisonnable. On parle alors de stigmatisme approché.



Définition : Un système optique est dit **stigmatique** au sens **approché** pour un couple de points A et A' si et seulement si les rayons lumineux issus de A passent au voisinage de A' après avoir traversé le système optique.

- Pour que le dioptre plan soit un système stigmatique au sens approché, il faut limiter la valeur prise par les angles d'incidence et de réfraction des rayons lumineux à des valeurs raisonnables, restant inférieures à 10° .

Position du point image par le dioptre plan lorsqu'on se place dans les conditions de stigmatisme approché.

- Dans le triangle dessiné par le dioptre plan, la normale au dioptre et le rayon lumineux considéré, on peut écrire les relations suivantes :

$$\frac{a}{L} = \tan(i_1) \quad \text{sachant qu'au petit angle } \tan(i_1) \approx i_1 \quad \text{on obtient} \quad \frac{a}{L} \approx i_1$$

$$\frac{a}{l} = \tan(i_2) \quad \text{sachant qu'au petit angle } \tan(i_2) \approx i_2 \quad \text{on obtient} \quad \frac{a}{l} \approx i_2$$

- On peut alors écrire la loi de Snell-Descartes reliant les valeurs des angles d'incidence et de réfraction : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ Sachant qu'au petit angle $\sin(i_1) \approx i_1$ et $\sin(i_2) \approx i_2$ on obtient $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$

- En associant ces trois relations, on obtient finalement que le point image est situé sur la normale au dioptre plan passant par le point objet avec : $l = \frac{n_2}{n_1} L$.

- Cette image est également virtuelle puisqu'elle est obtenue en prolongeant virtuellement les rayons lumineux émergeant du dioptre.

AD3 : profondeur apparente d'une piscine.

Un homme de $1,70\text{m}$ se tenant debout juste au bord d'un bassin regarde verticalement le fond de la piscine. Il est persuadé qu'il a pied et il estime la profondeur de la piscine à $1\text{m}50$. On prendra pour indice optique de l'eau $n=1,3$, et on prendra un indice optique de l'air unitaire.

- A-t-il réellement pied ?

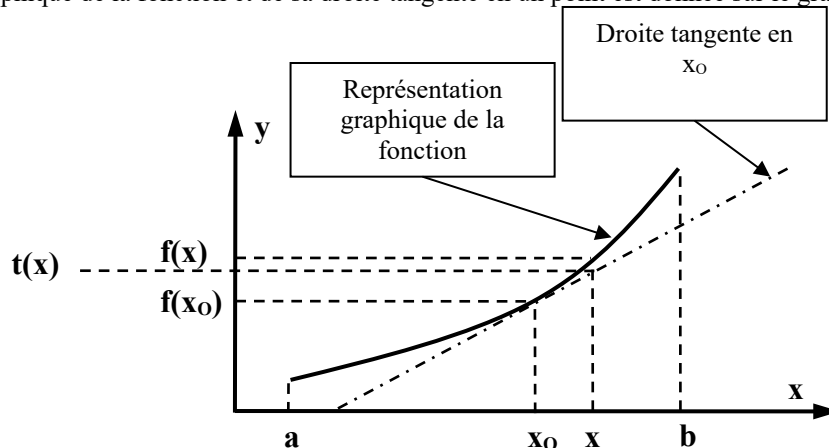
Capacités exigibles

- Définir le plan d'incidence.
- Énoncer et utiliser les lois de Snell-Descartes (avec des schémas !!!)
- Établir la condition de réflexion totale.
- Définir une convention d'orientation des angles et travailler avec des angles orientés.
- Savoir donner une estimation des valeurs des fonctions cosinus, sinus, et tangente par exploitation de l'équation de la droite tangente au point origine.
- Pour la fibre optique à saut d'indice : établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

Approximation linéaire d'une fonction au voisinage d'un point.

On considère une fonction mathématique f continue et dérivable sur un intervalle I . $f \Leftrightarrow \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

La représentation graphique de la fonction et de sa droite tangente en un point est donnée sur le graphique ci-dessous :



On observe que la représentation graphique de la fonction et la tangente sont proches l'une de l'autre sur un domaine entourant la valeur x_0 . On en déduit que les valeurs prises par $f(x)$ au voisinage de x_0 sont proches de $t(x)$, qui est la fonction obtenue par l'équation de la tangente en x_0 .

L'équation de la tangente est donnée par une ordonnée $f(x_0)$ en x_0 et une pente $\frac{df}{dx}(x_0)$.

On en déduit que : $t(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$

Conclusion :

Pour obtenir une approximation affine d'une fonction autour d'une valeur x_0 , on doit déterminer l'équation de la droite tangente à cette fonction en cette valeur.

On exploite alors la relation $f(x) \approx t(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$

Application aux fonctions trigonométriques en $x_0=0$:

- Pour la fonction cosinus : $\cos(x) \approx \cos(x_0) - \sin(x_0)(x - x_0)$ d'où $\cos(x) \approx 1$
- Pour la fonction sinus : $\sin(x) \approx \sin(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0)$ d'où $\sin(x) \approx x$
- Pour la fonction tangente : $\tan(x) \approx \tan(x_0) + \frac{1}{\cos^2(x_0)}(x - x_0)$ d'où $\tan(x) \approx x$