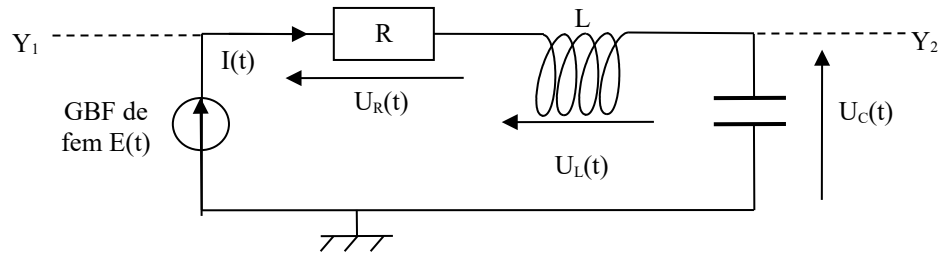
Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé.

1. Introduction du régime sinusoïdal forcé.

1.1. Exemple du circuit RLC.



On étudie à nouveau le circuit RLC, on souhaite établir la réponse de ce circuit lorsqu'on le soumet à un générateur produisant une f.e.m sinusoïdale $E(t)=e_O\cos(\omega t)$. On choisit ici l'origine des temps pour que la phase à l'origine de ce signal soit nulle.
On établit alors l'équation différentielle vérifiée par la tension $U_C(t)$.
On écrit la loi des mailles pour ce circuit : $E(t)=U_R(t)+U_L(t)+U_C(t)$
On écrit alors les équations caractéristiques pour le conducteur ohmique et la bobine et le condensateur :

$U_R(t)=RI(t)$; $U_L(t)=L\dfrac{dI}{dt}(t)$; $I(t)=C\dfrac{dU_C}{dt}(t)$

On obtient l'équation : $\dfrac{d^2U_C}{dt^2}(t)+\dfrac{\omega_O}{Q}\dfrac{dU_C}{dt}(t)+\omega_O^2U_C(t)=\omega_O^2e_O\cos(\omega t)$ avec $\omega_O=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

1.2. Régime transitoire et régime sinusoïdal permanent.

La réponse en tension du circuit est une solution de l'équation précédemment établie. D'après la théorie connue pour les équations linéaires à coefficients constants, elle se décompose en deux parties :

- Une solution de l'équation homogène associée, c'est-à-dire la réponse du circuit en régime libre que l'on a déjà étudié en première période. Quel que soit le type de réponse (amortie, critique ou pseudo périodique), le régime libre présente une durée caractéristique τ. Au bout d'une durée de l'ordre de quelques fois τ, l'amplitude du régime libre est quasiment nulle.
- **Une solution particulière $S_P(t)$ de l'équation complète qu'on désigne dans ce cas particulier par le terme « réponse en régime sinusoïdal forcé » en physique. Lorsque le régime libre prend fin, on n'observe plus que le régime sinusoïdal forcé. La solution particulière est cherchée sous la forme d'un signal sinusoïdal synchrone du terme de forçage apparaissant au second membre.**

2. Le régime sinusoïdal forcé.

2.1. Principe et application au cas du circuit RLC.

Le second membre s'écrit ici $\omega_O^2e_O\cos(\omega t)$, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction sinusoïdale synchrone du second membre $U_P(t)=u_O\cos(\omega t+\varphi)$, où on doit déterminer l'amplitude u_O et le déphasage φ de la réponse par rapport au signal d'entrée pris comme référence de phase.
Pour déterminer cette réponse, on utilise le passage par les notations complexes :

- ✓ **On associe au second membre la notation complexe correspondante.**

Ce qui s'applique ici en introduisant la f.e.m complexe $\underline{E}(t)=e_O\exp(j\omega t)$ tel que $E(t)=Re(\underline{E}(t))$

- ✓ **On associe à la solution recherchée le signal complexe correspondant**

Ce qui s'applique ici en introduisant le signal complexe $\underline{U}_P(t)=u_O\exp(j(\omega t+\varphi))$ tel que $U_P(t)=Re(\underline{U}_P(t))$

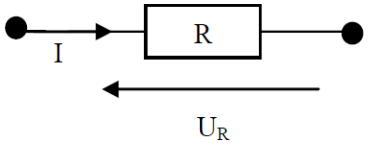
- ✓ **On établit l'équation algébrique vérifiée par les signaux complexes en traduisant les dérivées temporelles par des multiplication par jω.**

L'équation différentielle $\dfrac{d^2U_C}{dt^2}(t)+\dfrac{\omega_O}{Q}\dfrac{dU_C}{dt}(t)+\omega_O^2U_C(t)=\omega_O^2e_O\cos(\omega t)$

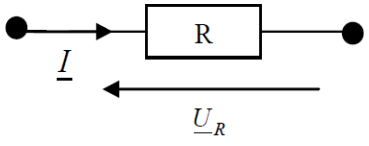
Se traduisant ici en l'équation algébrique $(j\omega)^2\underline{u_O}+\dfrac{\omega_O}{Q}(j\omega)\underline{u_O}+\omega_O^2\underline{u_O}=\omega_O^2e_O$

2.2. Impédance et admittance complexes.

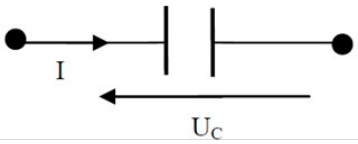
Si on souhaite étudier un circuit en régime sinusoïdal forcé, on vient de voir que l'utilisation des notations complexes s'impose.Il apparaît donc logique de traiter directement le circuit en notation complexe. On commence donc par reprendre les équations caractéristiques des composants linéaires et les traduire en notation complexe.



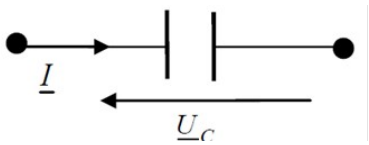
Signal réel : $U_R(t)=R\,I(t)$



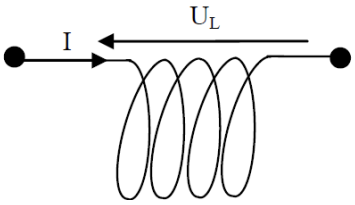
Signal complexe $\underline{U}_R(t)=R\,\underline{I}(t)$



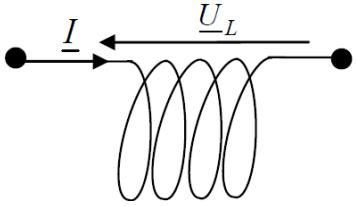
Signal réel : $I(t)=C\dfrac{dU_C}{dt}(t)$



Signal complexe $\underline{U}_C(t)=\dfrac{1}{jC\omega}\underline{I}(t)$



Signal réel : $U_L(t)=L\dfrac{dI}{dt}(t)$



Signal complexe $\underline{U}_L(t)=jL\omega\,\underline{I}(t)$

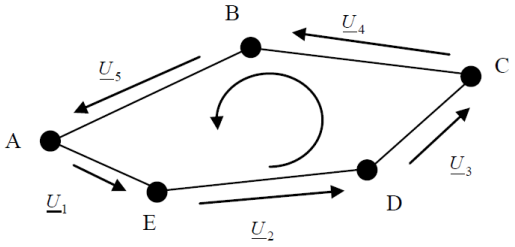
En régime sinusoïdal forcé, on associe donc aux grandeurs physiques réelles, ici la tension aux bornes d'un dipôle et l'intensité le traversant, des grandeurs complexes telles que : $I(t)=\mathrm{Re}(\underline{I}(t))$; $U_k(t)=\mathrm{Re}(\underline{U}_k(t))$. On définit alors l'impédance complexe $\underline{Z}(\omega)$ associée au dipôle par la relation $\underline{Z}(\omega)=\dfrac{\underline{U}_k(t)}{\underline{I}(t)}$ On établit alors en convention récepteur :
pour un conducteur ohmique de résistance R l'impédance est $\underline{Z}(\omega)=R$
Pour un condensateur de capacité C l'impédance est $\underline{Z}(\omega)=\dfrac{1}{jC\omega}$
Pour une bobine d'autoinductance L l'impédance est $\underline{Z}(\omega)=jL\omega$

Remarque : On définit aussi pour un dipôle l'admittance comme étant l'inverse de l'impédance $\underline{Y}(\omega)=\dfrac{1}{\underline{Z}(\omega)}$

2.3. Lois de l'électrocinétique.

On traduit alors facilement les lois de l'électrocinétique :

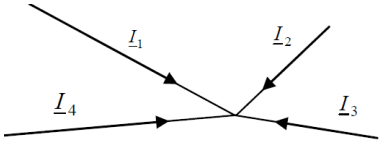
a. Loi des mailles



Lois des mailles :

$$\underline{U}_1+\underline{U}_2+\underline{U}_3+\underline{U}_4+\underline{U}_5=0$$

b. Loi des nœuds.

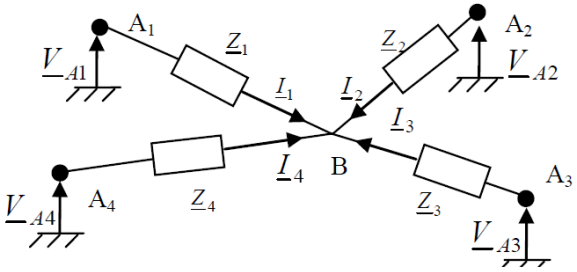


Lois des nœuds :

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3+\underline{I}_4=0$$

c. loi des nœuds en terme de potentiel

En régime sinusoïdal forcé, on peut utiliser la loi des nœuds en terme de potentiel à la place de la loi des nœuds en terme d'intensité pour réduire le nombre d'inconnues avec lesquelles on travaille.

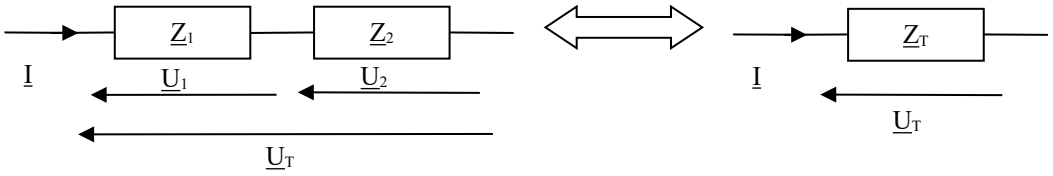


Lois des nœuds en terme de potentiel :

$$\frac{\underline{V}_B-\underline{V}_{A1}}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{V}_B-\underline{V}_{A2}}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{V}_B-\underline{V}_{A3}}{\underline{Z}_3}+\frac{\underline{V}_B-\underline{V}_{A4}}{\underline{Z}_4}=0$$

2.4. Lois d'association.

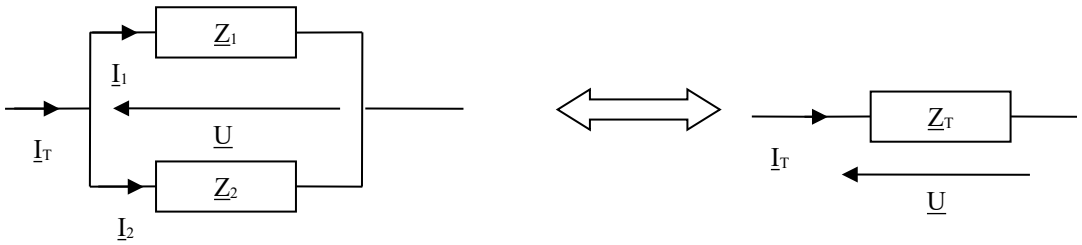
a. Association en série :



Pour des dipôles en série, l'impédance totale est obtenue par la somme des impédances : $\underline{Z}_T=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2$

On peut écrire les relations du diviseur de tension :$\underline{U}_1=\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}_T$ $\underline{U}_2=\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}_T$

b. Association en parallèle :



Pour des dipôles en parallèle, l'admittance totale est obtenue par la somme des admittances $\dfrac{1}{\underline{Z}_T}=\dfrac{1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{1}{\underline{Z}_2}$

3. Etude de la réponse en tension du circuit RLC.

3.1. Détermination de l'amplitude et de la phase par les complexes.

On a établi que si on soumet le circuit RLC à un générateur de f.e.m sinusoïdale $E(t)=e_O\cos(\omega t)$, la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation : $\dfrac{d^2U_C}{dt^2}(t)+\dfrac{\omega_O}{Q}\dfrac{dU_C}{dt}(t)+\omega_O^2U_C(t)=\omega_O^2e_O\cos(\omega t)$

La solution se chercher alors sous forme $U_P(t)=u_O\cos(\omega t+\varphi)$ à laquelle on associe le signal complexe $\underline{U}_P(t)=\underline{u}_O\exp(j(\omega t+\varphi))$ tel que $U_P(t)=\mathrm{Re}(\underline{U}_P)$.

L'équation différentielle se traduit alors par :$(j\omega)^2\underline{u}_O+\dfrac{\omega_O}{Q}(j\omega)\underline{u}_O+\omega_O^2\underline{u}_O=\omega_O^2e_O$

On en déduit alors l'amplitude complexe de la réponse en tension : $\underline{u}_O=\dfrac{\omega_O^2e_O}{(j\omega)^2+\dfrac{\omega_O}{Q}(j\omega)+\omega_O^2}$

Pour la solution du problème réel étudié, on obtient alors

- L'amplitude du signal réel $u_O=|\underline{u}_O|$ce qui donne ici $u_O=\dfrac{\omega_O^2e_O}{\sqrt{\left(\omega_O^2-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega\omega_O}{Q}\right)^2}}=\dfrac{e_O}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$ où $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$
- la phase à l'origine du signal réel :$\varphi=arg(\underline{u}_O)$ d'où $\varphi=arg(e_O)-arg\left(\left(1-x^2\right)+j\dfrac{x}{Q}\right)$ et $\tan(\varphi)=-\dfrac{x}{Q\left(1-x^2\right)}$

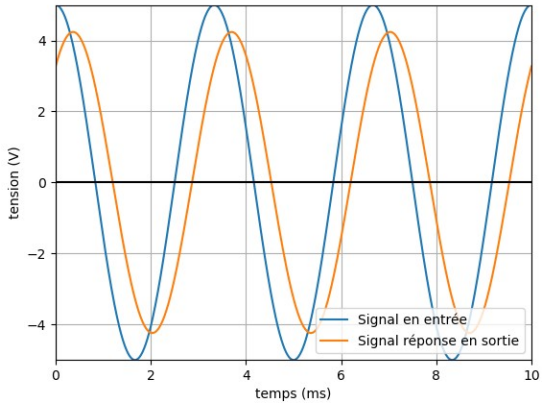
Selon le signe de x, il faut alors distinguer trois cas, on s'arrange en physique pour la courbe représentative de la phase soit continue en x=1 ce qui donne :

$$\varphi=\begin{cases}-\arctan\left(\dfrac{x}{Q\left(1-x^2\right)}\right) & si\ x<1\\ -\pi/2 & si\ x=1\\ -\arctan\left(\dfrac{x}{Q\left(1-x^2\right)}\right)-\pi & si\ x>1\end{cases}$$

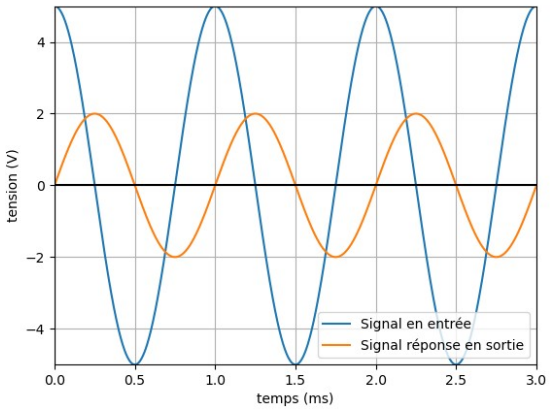
3.2. allure des courbes du signal de forçage et de la réponse en tension.

Lorsqu'on observe les signaux à l'aide d'un oscilloscope, $e(t)=e_O\cos(\omega t)$ en entrée du circuit RLC avec e_O=5,0V, $U_C(t)=u_O\cos(\omega t+\varphi)$ en sortie aux bornes du condensateur, on obtient alors l'allure suivante pour un circuit RLC de fréquence propre f_O=1kHz et de facteur de qualité Q=0,4.

- Déterminer sur ces deux graphiques l'amplitude et le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. Vérifier la cohérence avec les valeurs fournies pour f_O et Q.



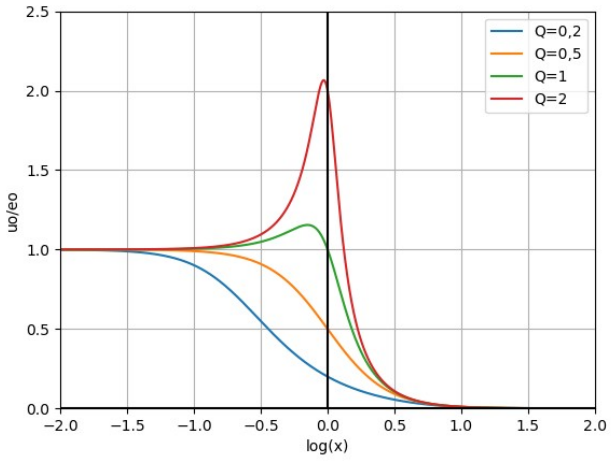
pour une fréquence du signal en entrée 0,3kHz.

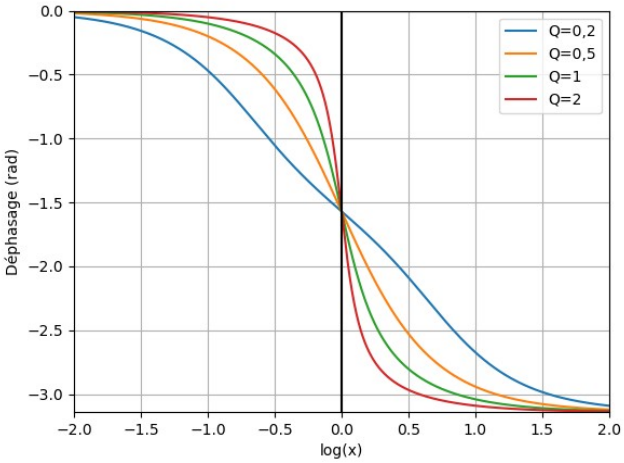


pour une fréquence du signal en entrée 1,0kHz

3.3. *Allure des courbes de l'amplitude et de la phase pour la réponse en tension du circuit RLC.*

La représentation des courbes donnant l'amplitude du signal en sortie, et le déphasage introduit par le circuit entre le signal d'entrée et la tension en sortie, aux bornes du condensateur, se fait en échelle logarithmique en abscisse pour visualiser de manière symétrique le domaine basse fréquence sous la valeur de fréquence propre f_O et le domaine haute fréquence au-dessus de la fréquence propre On les représente ci-dessous en fonction de $\log_{10}(x)$.





Comportement asymptotique basse fréquence :

- Le gain est unitaire et le déphasage nul. Le circuit « suit » la commande du générateur.

Comportement asymptotique haute fréquence :

- Le gain est nul et le déphasage de -π. Le circuit ne « suit » plus la commande du générateur.

Comportement autour de la fréquence propre :

- Si le circuit présente un facteur de qualité suffisant, il y a un intervalle de valeur de x pour lequel le circuit « sur réagit » à la commande du générateur.
- Pour la fréquence propre du système, le déphasage est de -π/2, le générateur et la tension aux bornes du condensateur sont en quadrature.

3.4. *Phénomène de résonance en tension du circuit RLC.*

On constate donc que le circuit peut présenter une réponse plus grande en tension que la f.e.m du générateur. Ce phénomène est appelée résonnance. On doit établir la valeur minimale de Q pour observer la résonnance et lorsque celle-ci a lieu la valeur de pulsation ω_R (ou encore le rapport x_R) pour laquelle on a une réponse d'amplitude maximale.

L'amplitude $u_O = \dfrac{e_O}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$ est maximale quand $f(x)=\left(1-x^2\right)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2$ est minimal.

La dérivée de f(x) est alors : $\dfrac{df}{dx}(x)=4x\cdot\left(-1+x^2+\dfrac{1}{2Q^2}\right)$ On cherche une solution non nulle à l'équation : $\dfrac{df}{dx}(x)=0$.

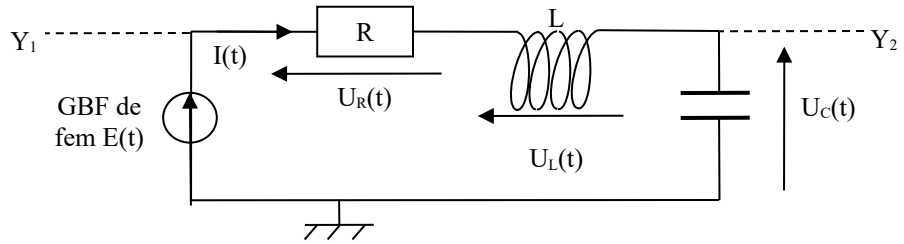
On cherche les annulations de $\left(-1+x^2+\dfrac{1}{2Q^2}\right)$ soit les solutions de $x^2=\left(1-\dfrac{1}{2Q^2}\right)$

- Si $Q<1/\sqrt{2}$, il n'y a pas de solution réelle et le circuit ne présentera pas de résonance.
- Si $Q\geq 1/\sqrt{2}$, il y a une solution réelle positive, le circuit présente une résonance et le maximum de la réponse en amplitude est obtenue pour $x_R=\frac{\omega_R}{\omega_O}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}$.

4. Etude de la réponse en intensité du circuit RLC.

4.1. Détermination directe des caractéristiques de l'intensité parcourant le circuit RLC.

Puisqu'on cherche à établir le comportement du circuit en régime sinusoïdal forcé, on va commencer à prendre l'habitude d'employer directement les notations complexes pour aboutir aux grandeurs qui nous intéressent.



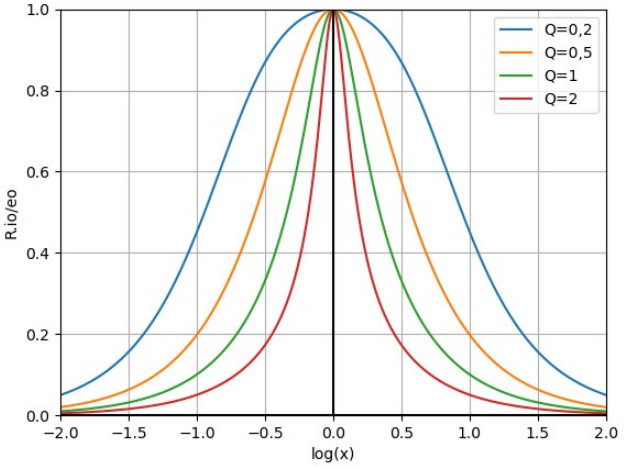
Pour le circuit RLC étudié ici, on observe que les trois composants sont associés en série et qu'on peut donc déterminer une impédance équivalente par la relation : $\underline{Z}_{eq}=\underline{Z}_R+\underline{Z}_L+\underline{Z}_C$

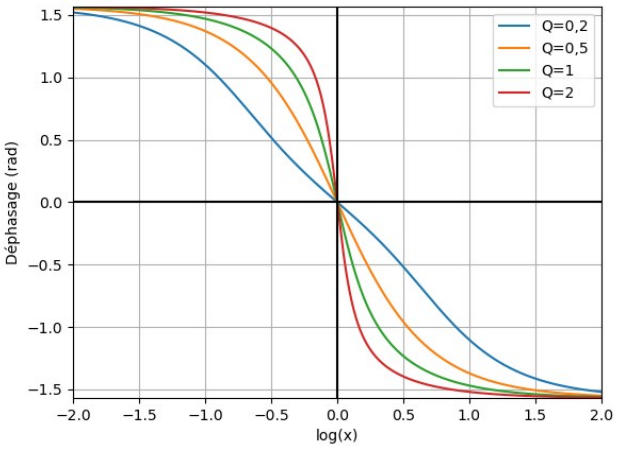
L'amplitude complexe $\underline{i}_O$ de l'intensité $\underline{I}(t)=\underline{i}_O\exp(j\omega t)$ dans le circuit en régime sinusoïdal forcé est obtenue par la relation $\underline{e}_O=\underline{Z}_{eq}\underline{i}_O$ ce qui donne $\underline{e}_O=\left(R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}\right)\underline{i}_O$

On aboutit alors à expression suivante $\underline{i}_O=\frac{e_O}{R}\cdot\frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ où $\omega_O=\frac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$; $x=\frac{\omega}{\omega_O}$

- L'amplitude réelle de l'intensité est alors: $i_O=\frac{e_O}{R}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$
- Le déphasage en intensité s'exprime $\Phi=-arg\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ soit $\Phi=-\arctan\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$

4.2. Allure des courbes en amplitude et en phase pour l'intensité.





Comportement asymptotique basse fréquence :

- Le gain est nul le déphasage de $+\pi/2$. Lorsque la tension aux bornes du condensateur reproduit la f.e.m, il est logique que l'intensité soit nulle. L'intensité est en avance de phase sur la f.e.m et donc la tension aux bornes du condensateur, ce qui est cohérent avec la multiplication par $j\omega$ de l'opération de dérivation.

Comportement asymptotique haute fréquence :

- Le gain est nul et le déphasage de $-\pi/2$. Le circuit ne « suit » plus la commande du générateur, il est logique que l'intensité du courant soit elle aussi nulle.

Comportement autour de la fréquence propre :

- L'intensité passe par un maximum en x=1, la résonnance en intensité se fait lorsqu'on place en entrée du circuit un signal de pulsation égale à la pulsation propre.
- Le déphasage est nul, le générateur et l'intensité dans le circuit sont alors en phase.

4.3. Phénomène de résonance en intensité du circuit RLC.

La résonance en intensité a lieu quel que soit la valeur du facteur de qualité, on constate cependant qu'elle est d'autant plus étroite que le facteur de qualité augmente. On va quantifier cette caractéristique en déterminant la largeur du domaine de pulsation sur lequel le gain en intensité est supérieur au quotient du gain max divisé par racine carré de deux.

On cherche les valeurs de x telle que : $G(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ il faut alors que $-1<Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)<1$

On étudie donc les deux conditions : $P_1(x)=x^2-\dfrac{1}{Q}x-1<0$ et $P_2(x)=x^2+\dfrac{1}{Q}x-1>0$

Pour le premier polynôme, il faut donc que : $x_1<x<x_2$ avec : $x_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Q}-\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}\right);x_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{Q}+\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}\right)$

Pour le second polynôme : $x>x_2'$ ou $x<x_1'$ avec : $x_1'=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{Q}-\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}\right);x_2'=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{Q}+\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+4}\right)$

Puisque x est nécessairement positif en tant que rapport de pulsations, la plage correspondante est $x_2'<x<x_2$, on obtient alors la largeur de la plage de résonance du circuit RLC en intensité : $\boxed{\Delta x=\dfrac{1}{Q}}$

Capacités exigibles

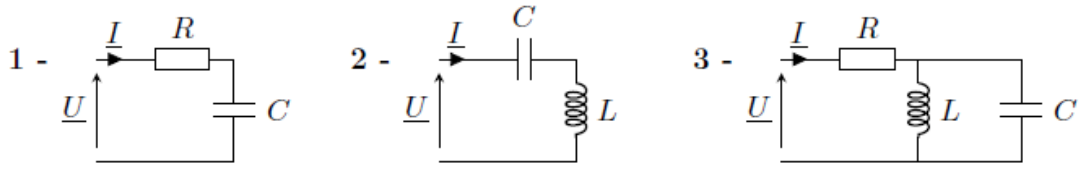
- Décrire un signal harmonique en termes d'amplitude, période, fréquence, pulsation, phase.
- Déterminer le déphasage entre deux signaux harmoniques synchrones.
- Passer de la représentation réelle à la représentation complexe d'un signal harmonique, et réciproquement.
- Connaître et établir l'expression de l'impédance complexe d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.
- Remplacer une association série ou parallèle d'impédances (resp. d'admittances) par une impédance (resp. une admittance) équivalente.
- Étudier un circuit électrique en régime permanent sinusoïdal forcé par la méthode des complexes.
- Définir une résonnance.
- A partir d'une impédance complexe donnée, déterminer analytiquement la pulsation de résonance d'un système.
- Savoir et savoir établir que la résonance en tension aux bornes du condensateur dans le circuit RLC série n'existe que pour les facteurs de qualité suffisamment grands ($Q > 1/\sqrt{2}$)
- Relier qualitativement et quantitativement l'acuité de la résonnance en intensité dans le circuit RLC série au facteur de qualité.

AD1 : Impédance et admittance des composants linéaires passifs.

1. Rappeler la loi de comportement d'un condensateur. En déduire l'expression de l'impédance associée à un condensateur. Etudier le comportement limite de cette impédance pour les hautes fréquences et les basses fréquences. En déduire le dipôle équivalent à un condensateur en régime limite basse fréquence et régime limite haute fréquence.
2. Faire ensuite de même avec la bobine.

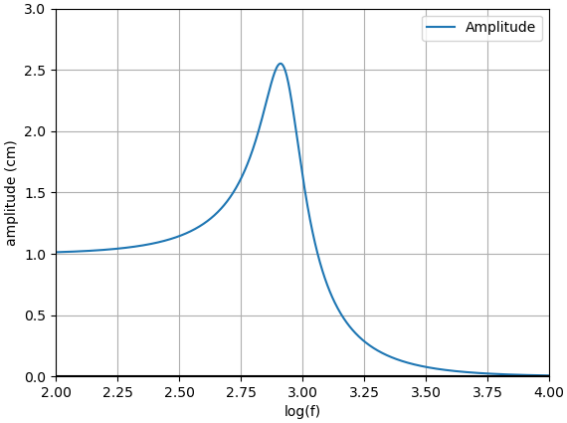
AD2 : Impédance équivalente à des associations de composants.

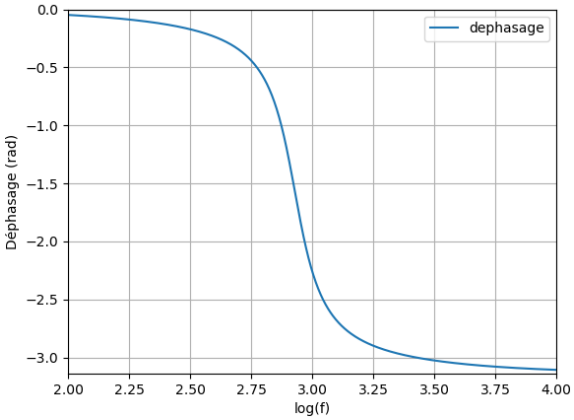
1. Exprimer l'impédance équivalente entre les bornes d'entrée pour les trois circuits suivants c'est-à-dire $\underline{Z}_{eq}$ tel que $\underline{U} = \underline{Z}_{eq}\,\underline{I}$



AD3 : Analyse des courbes de résonance d'un oscillateur amorti mécanique.

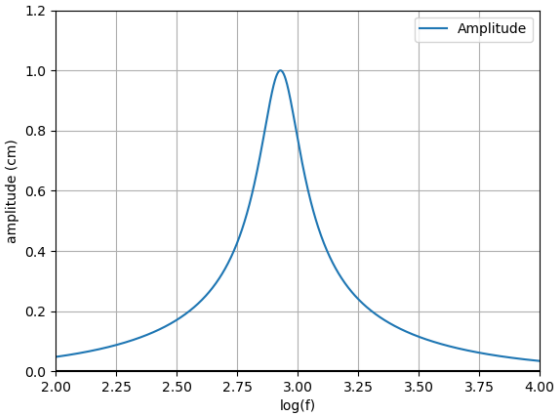
L'étude expérimentale d'un oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé permet de relever les courbes suivantes pour la réponse en amplitude pour le mouvement du système.

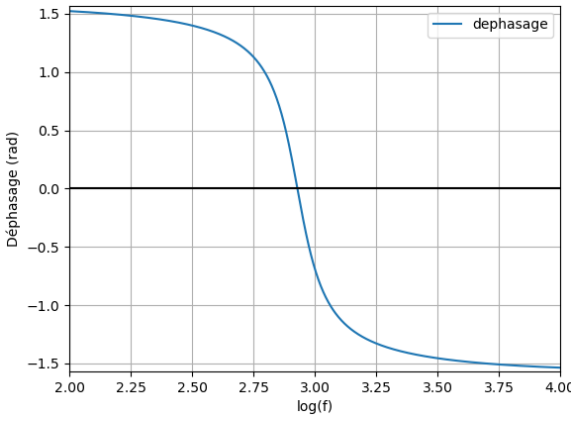




1. A quel type de réponse du circuit RLC vous font penser ces courbes ?
2. Déterminer la fréquence propre et le facteur de qualité de cet oscillateur.

La même étude permet de relever les courbes suivantes pour la réponse en vitesse du système.





3. A quel type de réponse du circuit RLC vous font penser ces courbes ?
4. Vérifier que ces courbes sont cohérentes avec les valeurs précédentes de la fréquence propre et du facteur de qualité.