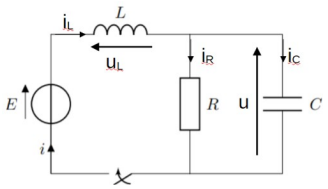
Corrigé de l'exercice 2 : Circuit L et R//C.

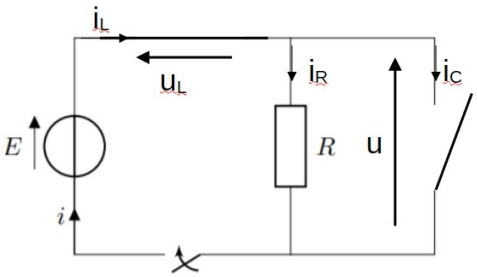
1. Voir schéma ci contre.



2. En régime stationnaire et interrupteur ouvert :

Pour un fil $u_L(t<0)=0$; pour un interrupteur ouvert $i_C(t<0)=i_L(t<0)=0$

La loi des nœuds donne : $i_R(t<0)=0$; La loi d'Ohm donne $u(t<0)=0$



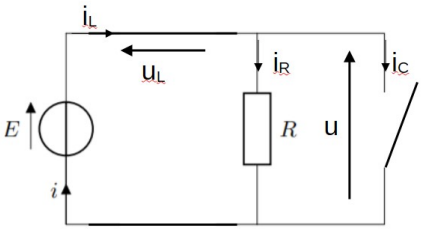
3. Juste après fermeture de l'interrupteur, par continuité de :
   - L'intensité du courant traversant une bobine $i_L(t=0+)=0$
   - La tension aux bornes d'un condensateur $u(t=0+)=0$

La loi des mailles donne $u_L(t=0+)=E$; La loi d'Ohm $i_R(t=0+)=0$; la loi des nœuds $i_C(t=0+)=0$

4. En régime stationnaire avec interrupteur fermé :

Pour un fil $u_L(t\to+\infty)=0$; pour un interrupteur ouvert $i_C(t\to+\infty)=0$

La loi des mailles donne : $u(t\to+\infty)=E$; La loi d'Ohm $i_R(t\to+\infty)=\frac{E}{R}$; la loi des nœuds $i_L(t\to+\infty)=\frac{E}{R}$



5. Pour l'équation différentielle, on écrit :

La loi des mailles donne : $E=u_L+u$; la loi des nœuds $i_L=i_R+i_C$

Loi d'Ohm $u=Ri_R$; Bobine $u_L=L\frac{di_L}{dt}$; Condensateur $i_C=C\frac{du}{dt}$

On en déduit que : $E=L\frac{di_L}{dt}+u=L\frac{d}{dt}(i_C+i_R)+u=LC\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{du}{dt}+u$

On obtient donc $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}u=\frac{E}{LC}$ forme canonique $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_O}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_O^2u=\omega_O^2E$

Par identification $\frac{1}{LC}=\omega_O^2;\frac{1}{RC}=\frac{\omega_O}{Q}$ ce qui donne $\omega_O=\frac{1}{\sqrt{LC}};Q=R\sqrt{\frac{C}{L}}$

6. Le régime est pseudopériodique si $Q>0{,}5$

Le polynome caractéristique s'écrit $r^2+\frac{\omega_O}{Q}r+\omega_O^2=0$ Le discriminant associé est $\Delta=\omega_O^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)<0$

Les racines sont alors $r_\pm=-\frac{\omega_O}{2Q}\pm j\,\omega_O\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=-\frac{1}{\tau}+j\,\omega$

En posant le temps caractéristique $\tau=\frac{2Q}{\omega_O}$ et la pseudo-pulsation $\omega=\omega_O\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ la solution générale de l'équation homogène s'écrit $S_H(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))$

La solution particulière s'écrit ici $S_P=E$

Alors $S_G(t)=S_H(t)+S_P=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))+E$

TSVP

Corrigé Exo2

7. Il faut déterminer les constante A et B introduites en exploitant les conditions initiales :

En t=0 $S_G(0)=0=A+E$

$\frac{dS_G}{dt}(t)=\left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)+\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)\right)$

En t=0 $\frac{dS_G}{dt}(0)=0=\left(-\frac{A}{\tau}\right)+B\omega$

On en déduit $A=E$ et $B=\frac{E}{\omega\tau}$ d'où $S_G(t)=E\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right)\right)$

On appelle décrément logarithmique, notée δ, la grandeur : $\delta=\frac{1}{N}\ln\left(\frac{u_C(t)-u_C(t\to+\infty)}{u_C(t+N.T)-u_C(t\to+\infty)}\right)$

8. Puisque $\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega t)$ est périodique de période T.

on obtient $\delta=\frac{1}{N}\ln\left(\frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{\exp\left(-\frac{(t+NT)}{\tau}\right)}\right)=\frac{T}{\tau}=\frac{2\pi}{\omega}\frac{\omega_O}{2Q}$ finalement $\delta=\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}\approx_{4Q^2\gg1}\frac{\pi}{Q}$

9. On lit sur le graphique les mesures suivantes :

1er pic : $u(t_O)-u_\infty\Leftrightarrow1{,}8\,cm$ 2nd pic $u(t_O+T)-u_\infty\Leftrightarrow0{,}9\,cm$ 3ème pic $u(t_O+2T)-u_\infty\Leftrightarrow0{,}45\,cm$

On en déduit $\delta\approx\ln 2$ puis $\boxed{Q\approx\frac{\pi}{\ln 2}=4{,}5}$ on peut vérifier que l'approximation est correcte puisque $4Q^2\approx80\gg1$

Pour la pseudopériode on mesure $4\,T\Leftrightarrow4{,}4\,cm$ et $0{,}8\,ms\Leftrightarrow6{,}2\,cm$ on en déduit $T\approx0{,}14\,ms$ et $\omega\approx4{,}4.10^4\,rad.s^{-1}$