Filtrage linéaire d'un signal périodique.

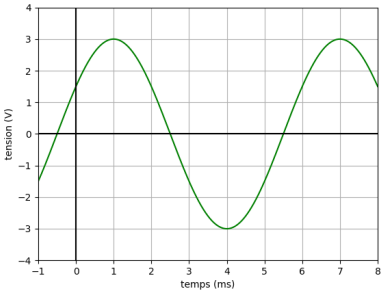
1. Signaux périodiques et décomposition en série de Fourier.

1.1. Signaux sinusoïdaux dits harmoniques.

On considère le signal sinusoïdal suivant : $s(t)=s_O\cos(\omega t+\varphi_O)=s_O\cos\left(\frac{2\pi}{T}(t-t_O)\right)$.

Il est caractérisé par :

- Son amplitude : s_O.
- Sa pulsation ω, sa fréquence f et sa période T sont liées par : $T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$
- Sa phase à l'origine φ_0 qui donne l'avance de phase du signal sur le signal de référence cos(ωt) et qui est relié au retard temporel t_O par la relation $\frac{\varphi_O}{2\pi}=-\frac{t_O}{T}$



La représentation graphique d'un signal harmonique est données ci contre :

➢ Faire la lecture graphique de l'amplitude, de la période et du retard pour le signal représenté et en déduire la pulsation et la phase à l'origine.

Définition : la valeur moyenne d'un signal périodique de période T s'exprime :$\langle s(t)\rangle_T=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T}s(t)\,dt$

On obtient alors pour le signal sinusoïdal :$\langle s(t)\rangle_T=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T}s_O\cos(\omega t+\varphi_O)\,dt=\frac{s_O}{\omega T}\left[\sin(\omega t+\varphi_O)\right]_{t_O}^{t_O+T}=0$

Un signal sinusoïdal « pur » est de moyenne nulle.

Définition : La valeur efficace d'un signal périodique de période T s'exprime :$s_{eff}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T}s^2(t)\,dt}$

On obtient alors pour le signal sinusoïdal $s_{eff}=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T}s_O^2\cos^2(\omega t+\varphi_O)\,dt$

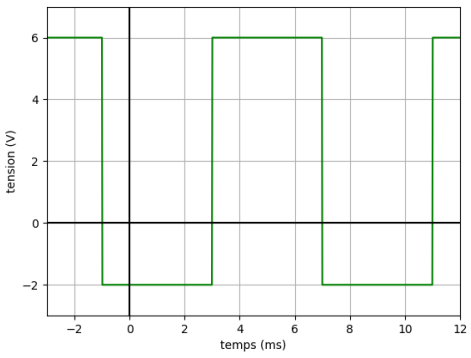
Par relation de trigonométries$s_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T}\frac{s_O^2}{2}\left(\cos(2\omega t+2\varphi_O)+1\right)dt=\frac{s_O^2}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+2\varphi_O)+t\right]_{t_O}^{t_O+T}$

Un signal sinusoïdal « pur » présente une valeur efficace : $s_{eff}=\frac{s_O}{\sqrt{2}}$

1.2. Signaux périodiques : exemple du signal créneau et du signal triangle.

a. Signal créneau.

On appelle signal créneau un signal périodique de période T prenant une valeur E_{max} sur une demi période et une valeur E_{min} sur l'autre demi période et s'écrivant donc sous la forme suivante, on obtient le reste du signal en exploitant la périodicité temporelle T. : $s_{créneau}(t)=\begin{cases}E_{max}\ si\ t_O<t<t_O+T/2\\ E_{min}\ si\ t_O+T/2<t<t_O+T\end{cases}$



La représentation graphique de ce signal présente l'allure ci contre :

➢ Faire la lecture graphique de la valeur maximale, de la valeur minimale, de la période et de l'instant t_O pour le signal représenté et en déduire l'amplitude et la valeur moyenne.

Pour ce signal périodique, la valeur moyenne s'exprime$\langle s_{créneau}(t)\rangle_T=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T/2}E_{max}\,dt+\frac{1}{T}\int_{t_O+T/2}^{t_O+T}E_{min}\,dt$

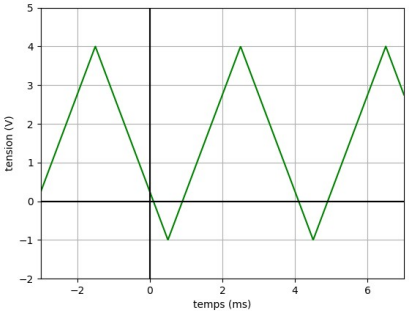
On en déduit$\langle s_{créneau}(t)\rangle_T=\frac{E_{max}+E_{min}}{2}$ et on appelle alors amplitude de ce signal $A=\frac{E_{max}-E_{min}}{2}$

Pour la valeur efficace $s_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_{t_O}^{t_O+T/2}E_{max}^2\,dt+\frac{1}{T}\int_{t_O+T/2}^{t_O+T}E_{min}^2\,dt$ ce qui donne $s_{eff}=\sqrt{\frac{E_{max}^2+E_{min}^2}{2}}$

b. Signal triangle.

On appelle signal triangle un signal périodique de période T en dent de scie symétrique de valeur maximale E_{max} et de valeur minimale E_{min}.

Ce signal présente donc une pente $p=\frac{E_{max}-E_{min}}{T/2}$ pendant une demi période et une pente $p'=\frac{E_{min}-E_{max}}{T/2}$ pendant l'autre demi période, il peut s'exprimer sous la forme suivante, on obtient le reste du signal en exploitant la périodicité temporelle T : $s_{tri}(t)=\begin{cases}\frac{2(E_{max}-E_{min})}{T}t+E_{min} \; si \; t_O<t<t_O+T/2 \\ \frac{2(E_{min}-E_{max})}{T}t+E_{max} \; si \; t_O+T/2<t<t_O+T\end{cases}$



La représentation graphique de ce signal présente l'allure suivante :

- Faire la lecture graphique de la valeur maximale, de la valeur minimale, de la période et de l'instant t_O pour le signal représenté et en déduire l'amplitude et la valeur moyenne.

La valeur moyenne s'exprime après calcul par $\langle s_{tri}(t)\rangle_T=\frac{E_{max}+E_{min}}{2}$ et son amplitude s'exprime $A=\frac{E_{max}-E_{min}}{2}$

La valeur efficace de ce signal s'exprime après calcul $s_{tri,eff}=\sqrt{\frac{E_{max}^2+E_{max}E_{min}+E_{min}^2}{3}}$

1.3. Décomposition d'un signal périodique en une « somme de fonctions sinusoïdales ». Série de Fourier.

a. Analyse de Fourier d'un signal périodique. La théorie.

La théorie de Fourier affirme que tout signal périodique f(t) de période $T=\frac{1}{f_F}=\frac{2\pi}{\omega_F}$ peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier : $f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\cos(k\,\omega_F t+\varphi_k)$

Pour laquelle :

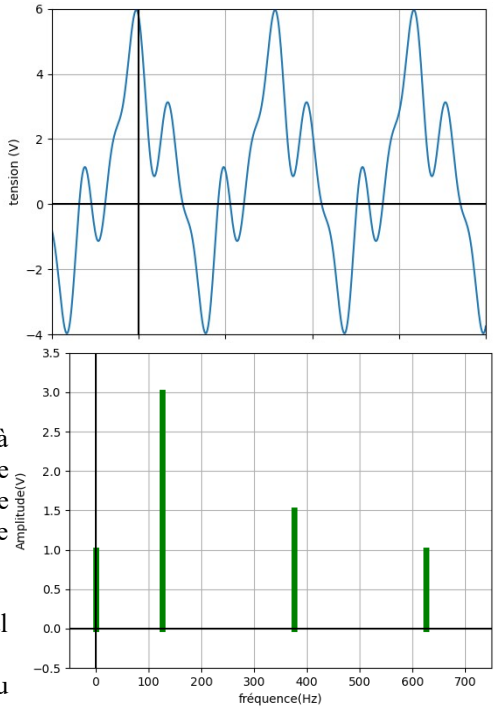
- Le terme de rang nul (k=0) c'est-à-dire c_O est la moyenne du signal périodique étudié.
- le terme de rang un est nommé le fondamental et $\omega_F=2\pi/T$ est la pulsation du fondamental.
- chacun des termes de rang k de pulsation $\omega_k=k\,\omega_F$ est appelé harmonique de rang k du signal.

b. Quelques exemples concrets : somme de trois signaux sinusoïdaux et d'une composante continue.

On étudie dans ce premier exemple un cas simple où le signal périodique présente :

- Une composante constante s_O.
- Une composante fondamentale d'amplitude s_1 et de pulsation ω_F.
- Une harmonique de rang 3 d'amplitude s_3 et de pulsation $3\omega_F$.
- Une harmonique de rang 5 d'amplitude s_5 et de pulsation $5\omega_F$.

Une représentation graphique de ce signal est donnée ci-contre.



- Déterminer la période de ce signal.
- En déduire la fréquence fondamentale et la pulsation fondamentale.
- En déduire les fréquences et les pulsations des deux harmoniques.
- Déterminer la valeur moyenne du signal.

Pour accéder aux amplitudes des composantes de ce signal, on procède à une analyse de Fourier qui est disponible sur de nombreux logiciels de traitement des signaux, nous illustrerons ce point en TP. L'analyse de Fourier fournit le spectre du signal, en donnant l'amplitude de chacune des harmoniques qui composent le signal.

On obtient pour le signal représenté ci-dessus le spectre ci-contre :

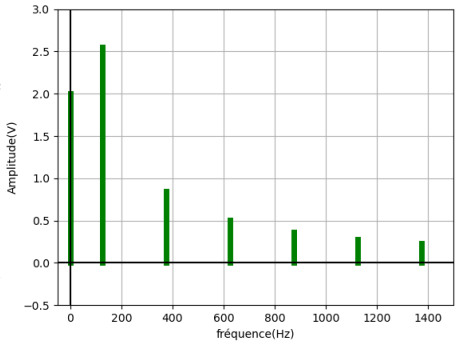
- Analyser ce spectre pour en extraire la valeur moyenne du signal et vérifier la cohérence avec l'étude précédente.
- Analyser ce spectre pour en extraire les amplitudes du fondamental et des harmoniques.
- Quels éléments descriptifs du signal étudié ne peuvent pas être obtenus par étude du spectre ?

c. Quelques exemples concrets : signal créneau.

Pour un signal créneau impair (pour lequel t_O=0), la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante : $s_{créneau}(t)=\langle s_{créneau}\rangle_T+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4A}{2k+1}\sin\left((2k+1)\omega_F t\right)$.

On notera que dans cette décomposition :

- La valeur moyenne est donnée par la composante constante de fréquence nulle.
- Il y a un signal fondamental (k=0).
- Il y a en théorie une infinité d'harmoniques impaires.

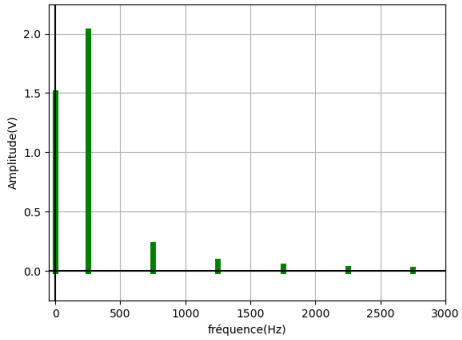


Pour le signal créneau représenté en partie 1.2, on obtient le spectre ci contre.

- Analyser ce spectre pour retrouver la valeur moyenne du signal créneau, la fréquence fondamentale f_F et la période temporelle T.

d. Quelques exemples concrets : signal triangle.

Pour un signal triangle pair (pour lequel t_O=T/2), la décomposition en série de Fourier est donnée par la relation suivante : $s_{tri}(t)=\langle s_{tri}\rangle_T+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8A}{(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\omega_F t\right)$.



On notera que dans cette décomposition :

- La valeur moyenne est donnée par la composante constante de fréquence nulle.
- Il y a un signal fondamental (k=0).
- Il y a en théorie une infinité d'harmoniques impaires.

Pour le signal triangle représenté en partie 1.2, on obtient le spectre ci contre.

- Analyser ce spectre pour retrouver la valeur moyenne du signal créneau, la fréquence fondamentale f_F et la période temporelle T.

e. Relation donnant la valeur efficace du signal en fonction des amplitudes des harmoniques.

Pour un signal périodique dont on connait la décomposition en série de Fourier, on peut noter le résultat remarquable suivant : La valeur efficace du signal périodique est la somme des valeurs efficaces des composantes du signal ce qui se traduit par la relation dite de Parseval : $s_{eff}^2=c_O^2+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{c_k^2}{2}$.

2. Description générale des filtres linéaires.

2.1. Principe d'étude.

De manière générale, on schématise un filtre par un quadrupôle. **On décrira ici le cas où le signal d'entrée sur le filtre et le signal de sortie du filtre sont des tensions.**



On considère donc le schéma général ci contre :

Pour comprendre l'effet d'un filtre sur un signal, on s'appuie sur l'analyse de Fourier. On commence donc par étudier l'effet du filtre sur un signal sinusoïdal, et on se placera dans le cadre d'étude du régime sinusoïdal forcé.

On utilisera donc les notations complexes :

- Signal d'entrée harmonique : $e(t)=e_O\cos(\omega t)=\mathrm{Re}\left(\underline{e}(t)\right)$ avec $\underline{e}(t)=e_O\exp(j\omega t)$
- Signal de sortie harmonique : $s(t)=s_O\cos(\omega t)=\mathrm{Re}\left(\underline{s}(t)\right)$ avec $\underline{s}(t)=\underline{s}_O\exp(j\omega t)$

Dans notre étude, on étudiera le filtre seul sans tenir compte de la manière dont est réalisé le signal d'entrée ni de la composition du circuit se trouvant en sortie du filtre. En particulier, la sortie du filtre sera alors toujours considérée comme étant connectée sur un coupe circuit.

Ceci implique que **l'on considère toujours le filtre en « sortie ouverte » ce qui se traduit en électrocinétique par une intensité du courant délivré en sortie nulle :** $i_S(t)=0$

Le filtre est un circuit linéaire, ou fonctionnant en régime linéaire, la tension de sortie est donc liée à la tension d'entrée par une équation différentielle linéaire que l'on caractérise par son ordre n.

2.2. Fonction de transfert.

Définition : On caractérise un filtre d'ordre n par sa fonction de transfert définie comme le rapport du signal harmonique de sortie sur le signal harmonique d'entrée en notation complexe. On la note en général $\underline{H}(j\omega)$

$$\sum_0^n\left(a_k\frac{d^k s}{dt^k}(t)\right)=\sum_0^n\left(b_k\frac{d^k e}{dt^k}(t)\right)\Leftrightarrow\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}=\frac{\underline{s}_O}{e_O}=\frac{\sum_{k=0}^n b_k(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k(j\omega)^k}$$

2.3. Gain, gain en décibel et phase.

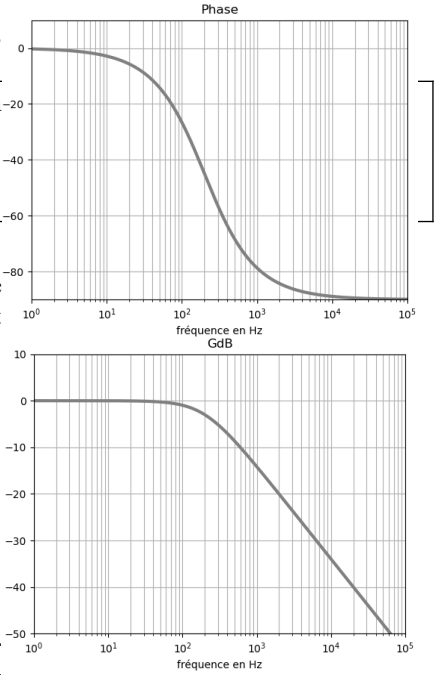
La fonction de transfert d'un filtre est une fonction dans le corps des complexes, on la caractérisera en étudiant :

- Le module de cette fonction de transfert pour définir le gain en amplitude du filtre : $\boxed{G(\omega)=|\underline{H}(j\omega)|}$.
  On définit également le gain en décibel d'un filtre par la relation : $\boxed{G_{\text{dB}}(\omega)=20\log(G(\omega))=20\log|\underline{H}(j\omega)|}$
- L'argument de cette fonction de transfert que l'on caractérisera par le déphasage introduit par le filtre : $\boxed{\varphi(\omega)=\arg(\underline{H}(j\omega))}$

2.4. Diagramme de Bode.

Définition : Le diagramme de Bode associé à un filtre est la représentation des deux courbes suivantes :

- Le diagramme de Bode en amplitude où on représente le gain en décibel $G_{\text{dB}}(\omega)$ en fonction de $\log\omega$.
- Le diagramme de Bode en phase où on représente le déphasage $\varphi(\omega)$ en fonction de $\log\omega$.



Exemple du diagramme de Bode du circuit RC ci-contre

- Si on envoie en entrée du circuit un signal sinusoïdal de fréquence 10Hz, le gain en décibel et nul, le gain est donc unitaire, et la phase est quasiment nulle. Ce qui veut dire que la fonction de transfert prend une valeur unitaire. Ce signal sera transmis en sortie sans modification.
- D'autre part, si on envoie en entrée du circuit un signal sinusoïdal de fréquence 2.10^3Hz, le gain en décibel prend la valeur -20dB, le gain est donc de 0,1, et la phase est de -60° soit $-\pi/3$.

La fonction de transfert s'exprime alors $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}=0{,}1*\exp\left(-j\pi/3\right)$

Le signal sera alors transmis en voyant son amplitude divisée par 10 et subira un retard de phase de $\pi/3$ par rapport au signal sinusoïdal en entrée.

Ce circuit laissera passer les signaux de basse fréquence sans les modifier et réduira l'amplitude des signaux de haute fréquence. On parlera donc d'un circuit passe bas.

3. Les filtres d'ordre 1.

3.1. Les filtres passe bas d'ordre 1.

a. Définition.

Un filtre est dans la catégorie des filtres passe-bas d'ordre 1, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique suivante : $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_O}}$ où H_O est le gain statique et ω_O est la pulsation propre du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O}{1+jx}$

b. Expression du gain, du gain en décibel et de la phase.

- Le gain est: $G(x)=\dfrac{|H_O|}{\sqrt{1+x^2}}$ le gain en décibel est: $G_{dB}(\omega)=20\log G(x)=20\log|H_O|-10\log\left(1+x^2\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega)=\arg(\underline{H}(j\omega))=\arg(H_O)-\arctan(x)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x<<1$

- La fonction de transfert peut être approximée par l'expression : $\underline{H}(jx)\rightarrow H_O$
- Le gain prend une valeur constante : $G(x)\rightarrow|H_O|$ Le gain en décibel présente une limite finie $G_{\text{dB}}(x)\rightarrow 20\log|H_O|$.

La courbe sur le diagramme de Bode présente alors une asymptote horizontale.

- La phase présente une limite finie $\varphi(\omega)\rightarrow\arg(H_O)$

Comportement haute fréquence : $x>>1$

- La fonction de transfert peut être approximée par l'expression : $\underline{H}(jx)\rightarrow\dfrac{H_O}{jx}$
- Le gain prend l'expression approché suivante : $G(x)\rightarrow\dfrac{|H_O|}{x}$ Le gain en décibel présente un comportement divergent vers -∞. $G_{dB}(\omega)=20\log|\underline{H}(j\omega)|\rightarrow 20\log|H_O|-20\log(x)$

La courbe sur le diagramme de Bode présente alors une asymptote oblique de pente -20 dB/décade.

- La phase présente une limite finie $\varphi(\omega) \rightarrow \arg(H_O) - \pi/2$

Comportement à la fréquence propre : $x=1$

- La fonction de transfert s'exprime alors : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O}{1+j}$
- Le gain s'exprime : $G(x)=\dfrac{|H_O|}{\sqrt{2}}$ Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1)=20\log|H_O|-10\log 2$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1)=\arg(H_O)-\dfrac{\pi}{4}$

d. Fréquence de coupure et bande passante.

Définition : On appelle pulsation de coupure à -3dB la valeur de pulsation ω_C pour laquelle le gain en décibel prend une valeur de -3dB en dessous de la valeur maximale. $G_{dB}(\omega_C)=G_{dB;max}-3\,dB$

Cette définition se traduit pour le gain par la relation $G(\omega_C)=\dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

On appelle bande passante le domaine de pulsation pour lequel le gain est supérieur au gain pour la pulsation de coupure.

Pour le filtre passe bas d'ordre 1, on obtient : $\omega_C=\omega_O$. La bande passante est le domaine de pulsation : $[0,\omega_C]$

e. Diagramme de Bode.

Sur le diagramme de Bode, on fait figurer les comportements asymptotiques, ainsi qu'une courbe approximative du comportement vrai de ces fonctions.

f. Comportement asymptotique et effet sur un signal sinusoïdal.

Pour le diagramme de Bode précédent, on identifie deux comportements asymptotiques :

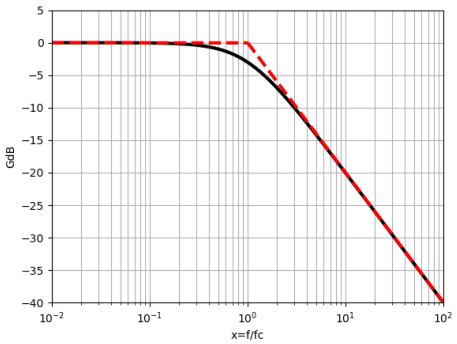
- Une asymptote horizontale, sur le domaine de pulsation inférieure à la pulsation de coupure :

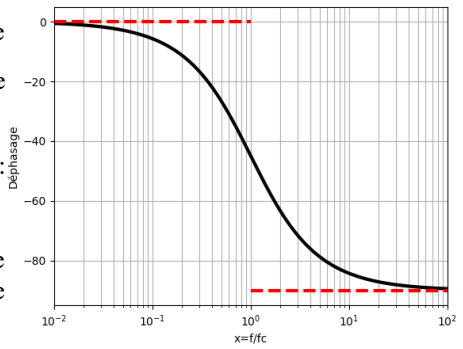
Si on impose en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation appartenant à ce domaine, le signal est simplement multiplié par le gain statique du filtre.

- Une asymptote oblique de pente -20dB/décade, sur le domaine de pulsation supérieure à la pulsation de coupure :

Cette asymptote oblique de pente -20dB par décade correspond à une fonction de transfert qui s'écrit sous la forme approchée : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O}{jx}$ d'où le lien entrée-sortie en notation complexe : $jx.\underline{s}(t)=H_O\underline{e}(t)$

Le retour aux notations réelles amène alors à la relation suivante : $\dfrac{ds}{dt}(t)=H_O\omega_O e(t)$





Conclusion : Lorsqu'on identifie sur le diagramme de Bode une asymptote oblique de pente **-20dB/dec** sur un domaine, on est assuré que le filtre présentera un comportement **intégrateur** sur ce domaine.

3.2. Filtre passe haut d'ordre 1.

a. Définition.

Un filtre est appelé passe-haut d'ordre 1, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique suivante : $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O.j\dfrac{\omega}{\omega_O}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_O}}$ où H_O est le gain statique et ω_O est la pulsation propre du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O.jx}{1+jx}$

b. Expression du gain, gain en décibel et de la phase.

- Le gain est $G(x)=\dfrac{|H_O|x}{\sqrt{1+x^2}}$ et le gain en décibel est: $G_{dB}(\omega)=20\log G(x)=20\log|H_O|+10\log\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega)=\arg(\underline{H}(j\omega))=\arg(H_O)+\dfrac{\pi}{2}-\arctan(x)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x<<1$

- La fonction de transfert peut être approximée par la relation : $\underline{H}(jx) \rightarrow H_O.jx$
- Le gain $G(x) \rightarrow |H_O|x$ Le gain en décibel diverge vers -∞, $G_{dB}(\omega) \rightarrow 20\log|H_O| + 20\log x$

La courbe sur le diagramme de Bode présente alors une asymptote oblique de pente +20 dB/décade.

- La phase présente une limite finie $\varphi(\omega) \rightarrow \arg(H_O) + \frac{\pi}{2}$

Comportement haute fréquence : $x>>1$

- La fonction de transfert peut être approximée par la relation : $\underline{H}(jx) \rightarrow H_O$
- Le gain $G(x) \rightarrow |H_O|$Le gain en décibel présente une limite finie. $G_{\text{dB}}(\omega) \rightarrow 20\log|H_O|$

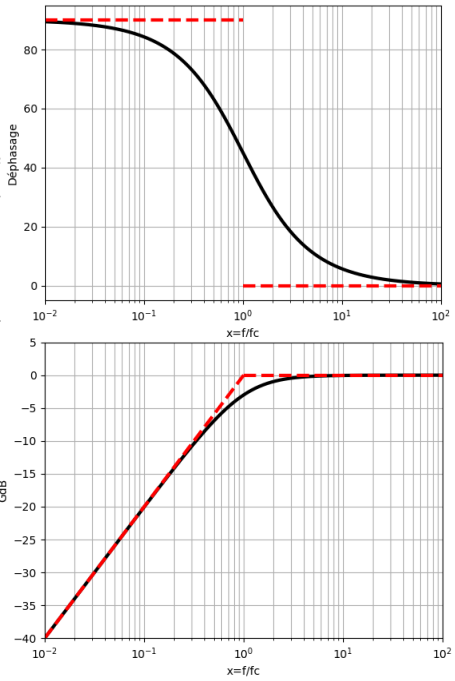
La courbe sur le diagramme de Bode présente alors une asymptote horizontale.

- La phase présente une limite finie $\varphi(\omega) \rightarrow \arg(H_O)$

Comportement à la fréquence propre : $x=1$

- La fonction de transfert s'exprime alors : $\underline{H}(jx) = \frac{jH_O}{1+j}$
- Le gain s'exprime : $G(x) = \frac{|H_O|}{\sqrt{2}}$ Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1) = 20\log|H_O| - 10\log 2$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1) = \arg(H_O) + \frac{\pi}{4}$

Pour le filtre passe haut d'ordre 1, on obtient pour fréquence de coupure: $\omega_C = \omega_O$. La bande passante est le domaine de pulsation : $[\omega_C, +\infty]$



d. Diagramme de Bode

Sur le diagramme de Bode, on fait figurer les comportements asymptotique ainsi qu'une courbe approximative du comportement vrai de ces fonctions.

Comportement asymptotique et effet sur un signal sinusoïdal.

Pour le diagramme de Bode précédent, on identifie deux comportements asymptotiques :

- Une asymptote horizontale, sur le domaine de pulsation supérieure à la pulsation de coupure :

Si on impose en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation appartenant à ce domaine, le signal est simplement multiplié par le gain statique du filtre.

- Une asymptote de pente +20dB par décade, sur le domaine de pulsation inférieure à la pulsation de coupure :

Si on impose en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation appartenant à ce domaine, on réalisera une dérivation de ce signal.

En reprenant l'étude asymptotique précédente, on observe que l'asymptote oblique de pente +20dB par décade correspond à une fonction de transfert qui s'écrit sous la forme approchée : $\underline{H}(jx) \rightarrow H_O.jx$

Le lien entre la tension d'entrée et la tension de sortie est donc en notation complexe : $.\underline{s}(t) = jxH_O\underline{e}(t)$

Le retour aux notations réelles amène alors à la relation suivante : $s(t) = \frac{H_O}{\omega_{iO}}\frac{de}{dt}(t)$

Conclusion : Lorsqu'on identifie sur le diagramme de Bode une asymptote oblique de pente **+20dB/dec** sur un domaine, on est assuré que le filtre présentera un comportement **dérivateur** sur ce domaine.

4. Les filtres d'ordre 2.

4.1. Filtres passe bas d'ordre 2.

a. Définition :

Un filtre est appelé passe-bas d'ordre 2, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique :

$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_O}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_O} - \frac{\omega^2}{\omega_O^2}}$ où H_O est le gain statique, ω_O est la pulsation propre et Q le facteur de qualité du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x = \frac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx) = \frac{H_O}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$

b. Expression du gain, du gain en décibel et de la phase.

- Le gain s'exprime : $G(x)=\dfrac{|H_O|}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$
- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(x)=20\log G(x)=20\log|H_O|-10\log\left(\left(1-x^2\right)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(x)=\arg\left(\underline{H}(jx)\right)=\begin{cases}\arg(H_O)-\arctan\left(\dfrac{x}{Q\left(1-x^2\right)}\right) & si\ x<1\\ \arg(H_O)-\pi/2 & si\ x=1\\ \arg(H_O)-\arctan\left(\dfrac{x}{Q\left(1-x^2\right)}\right)-\pi & si\ x<1\end{cases}$

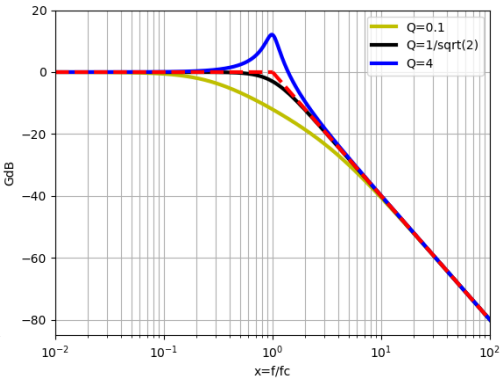
c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x<<1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)\to H_O$
- Le gain s'approxime par $G(x)\to|H_O|$ et le gain en décibel présente une limite finie $G_{dB}(\omega)\to 20\log|H_O|$
- La phase présente une limite finie $\varphi(\omega)\to\arg(H_O)$

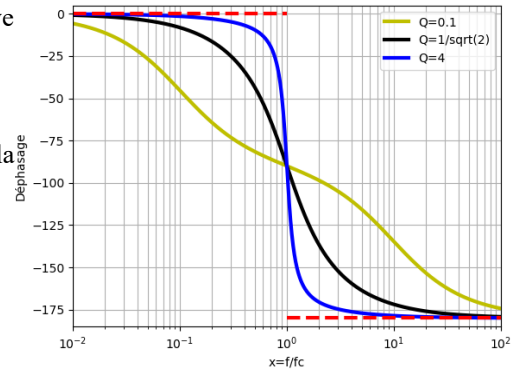
Comportement haute fréquence : $x>>1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)\to\dfrac{H_O}{-x^2}$
- Le gain s'approxime par $G(x)\to\dfrac{|H_O|}{x^2}$ et le gain en décibel $G_{dB}(\omega)=20\log|\underline{H}(j\omega)|\to 20\log|H_O|-40\log x$
- La phase présente une limite finie, la courbe représentative présente une asymptote horizontale $\varphi(\omega)\to\arg(H_O)-\pi$



Comportement à la fréquence propre : $x=1$

- La fonction de transfert s'exprime : $\underline{H}(jx)=-H_O jQ$
- Le gain prend la valeur $G(1)=|H_O|Q$Le gain en décibel prend la valeur particulière : $G_{dB}(1)=20\log|H_O|+20\log Q$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1)=\arg(H_O)-\dfrac{\pi}{2}$



d. Représentation du diagramme de Bode.

En vert : Q=0,1 ; En noir $Q=1/\sqrt{2}$; En bleu Q=4.

e. Observations

Cas$Q<1/\sqrt{2}$: on observe une plage de valeurs de pulsation centrée autour de x=1 pour laquelle la courbe de gain s'assimile à une droite de pente -20dB et la courbe de phase varie peu autour de la valeur –π/2.
Cas $Q>1/\sqrt{2}$: on sait que le circuit RLC présente une résonance en tension. On retrouve cette caractéristique sur le diagramme de Bode
Cas $Q=1/\sqrt{2}$: dans ce cas, le filtre ne présente pas de plage de résonance et sa pulsation de coupure est $\omega_C=\omega_O$.
Si on souhaite obtenir un filtre passe bas d'ordre 2, qui atténue deux fois plus les signaux haute fréquence qu'un filtre d'ordre 1, et pour lequel on souhaite avoir une pulsation de coupure $\omega_C=\omega_O$, on s'assurera qu'il présente un facteur de qualité prenant cette valeur $Q=1/\sqrt{2}$.

4.2. Filtre passe haut d'ordre 2.

a. Définition.

Un filtre est appelé passe-haut d'ordre 2, lorsque sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme canonique :

$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O\left(-\dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}\right)}{1+j\dfrac{\omega}{Q\omega_O}-\dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}}$ où H_O est le gain statique, ω_O est la pulsation propre et Q le facteur de qualité du filtre.

On pose alors la pulsation réduite : $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O\left(-x^2\right)}{1+j\dfrac{x}{Q}-x^2}$

b. Expression du gain en décibel et de la phase.

Pour le filtre passe haut d'ordre 2 :

- Le gain s'exprime : $G(x)=\dfrac{|H_O|x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}$
- le gain en décibel s'exprime : $G_{dB}(\omega)=20\log|H_O|+40\log x-10\log\left((1-x^2)^2+\left(\dfrac{x}{Q}\right)^2\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(x)=\arg(\underline{H}(jx))=\begin{cases}\arg(H_O)-\arctan\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right)+\pi & si\ x<1\\ \arg(H_O)+\pi/2 & si\ x=1\\ \arg(H_O)-\arctan\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right) & si\ x<1\end{cases}$

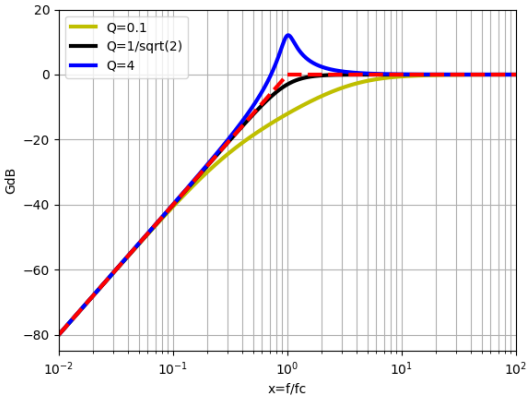
c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x<<1$

- La fonction de transfert peut s'approximer $\underline{H}(jx)\rightarrow -H_O x^2$
- Le gain s'approxime par $G(x)\rightarrow|H_O|x^2$ et le gain en décibel par $G_{dB}(\omega)\rightarrow 20\log|H_O|+40\log x$ Il présente une asymptote de pente +40dB/décade.
- La phase s'approxime par $\varphi(\omega)\rightarrow\arg(H_O)+\pi$

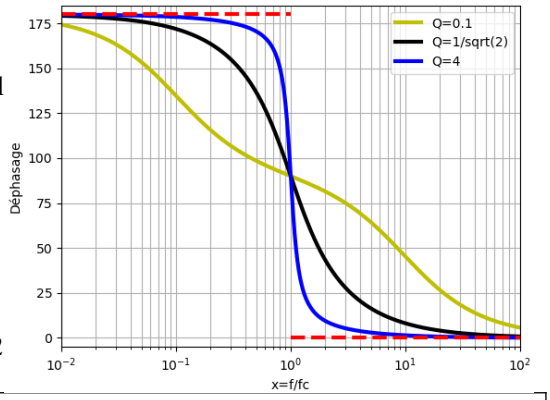
Comportement haute fréquence : $x>>1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)\rightarrow H_O$
- Le gain s'approxime par $G(x)\rightarrow|H_O|$ et le gain en décibel par $G_{dB}(\omega)\rightarrow 20\log|H_O|$
- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega)\rightarrow\arg(H_O)$



Comportement à la fréquence propre : $x=1$

- La fonction de transfert peut s'exprimer par : $\underline{H}(jx)\rightarrow jQH_O$
- Le gain s'exprime $G(1)=|H_O|Q$ et le gain en décibel $G_{dB}(1)=20\log|H_O|+20\log Q$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1)=\arg(H_O)+\dfrac{\pi}{2}$



d. Représentation du diagramme de Bode.

En jaune : Q=0,1 ; en noir $Q=1/\sqrt{2}$: ; En bleu Q=4.

e. Observations.

Les observations sont les mêmes que pour le filtre passe bas d'ordre 2 précédemment détaillées.

On retiendra que pour construire un filtre passe haut d'ordre 2 se comportant correctement pour une fréquence de coupure $\omega_C=\omega_O$, c'est-à-dire filtrant au mieux les basses fréquences et laissant passer les hautes fréquences, il faut s'assurer que le facteur de qualité prend une valeur proche de $1/\sqrt{2}$.

4.3. Filtre passe bande d'ordre 2.

a. Définition.

Un filtre est appelé passe-bande d'ordre 2, lorsque sa fonction de transfert s'écrit sous la forme canonique :

$\underline{H}(j\omega)=\dfrac{H_O\left(j\dfrac{\omega}{Q\omega_O}\right)}{1+j\dfrac{\omega}{Q\omega_O}-\dfrac{\omega^2}{\omega_O^2}}$ où H_O est le gain statique, ω_O est la pulsation propre et Q le facteur de qualité.

On pose alors la pulsation réduite : $x=\dfrac{\omega}{\omega_O}$ et on obtient : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O\left(j\dfrac{x}{Q}\right)}{1+j\dfrac{x}{Q}-x^2}=\dfrac{H_O}{1+jQ\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}$

b. Expression du gain en décibel et de la phase.

Pour le filtre passe bande d'ordre 2 :

- Le gain s'exprime : $G(x)=\dfrac{|H_O|}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}$
- le gain en décibel s'exprime : $G_{\text{dB}}(\omega)=20\log|\underline{H}(j\omega)|=20\log|H_O|-10\log\left(1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\right)$
- La phase s'exprime : $\varphi(\omega)=\arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)=\arg\left(H_O\right)-\arctan\left(Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right)$

c. Etude asymptotique.

Comportement basse fréquence : $x<<1$

- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)=H_O\dfrac{jx}{Q}$
- Le gain s'approxime par $G_{\text{dB}}(\omega)\rightarrow|H_O|\dfrac{x}{Q}$ et le gain en décibel par $G_{\text{dB}}(\omega)\rightarrow 20\log|H_O|-20\log Q+20\log x$

L'asymptote présente une pente de +20dB/décade.

- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega)\rightarrow\arg\left(H_O\right)+\dfrac{\pi}{2}$

Comportement haute fréquence : $x>>1$

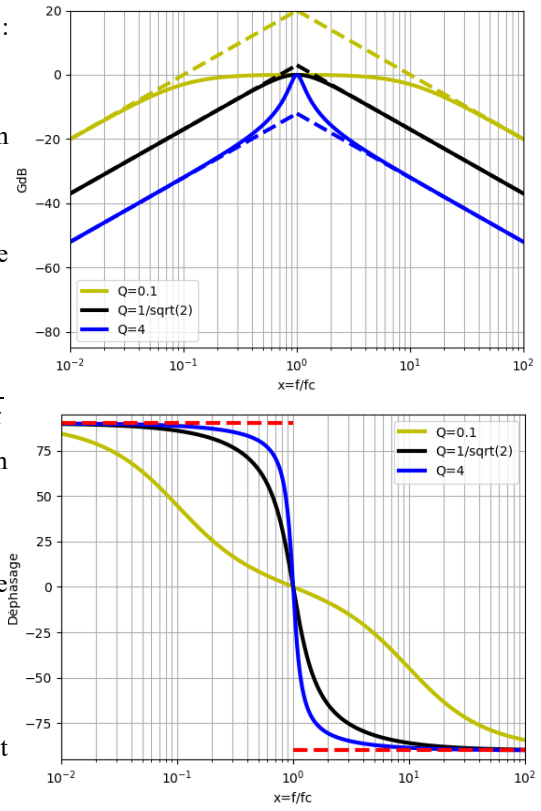
- La fonction de transfert peut s'approximer par : $\underline{H}(jx)=\dfrac{H_O}{jQx}$
- Le gain s'approxime par $G_{\text{dB}}(\omega)\rightarrow|H_O|\dfrac{1}{Qx}$ et le gain en décibel par $G_{\text{dB}}(\omega)\rightarrow 20\log|H_O|-20\log Q-20\log x$

L'asymptote présente une pente de -20dB/décade.

- La courbe de phase présentera une asymptote horizontale pour la valeur : $\varphi(\omega)\rightarrow\arg\left(H_O\right)-\dfrac{\pi}{2}$

Comportement à la fréquence propre : $x=1$

- La fonction de transfert s'exprime : $\underline{H}(j1)=H_O$
- Le gain prend la valeur $G(1)=|H_O|$et le gain en décibel est $G_{dB}(1)=20\log|H_O|$
- La phase prend la valeur particulière : $\varphi(1)=\arg\left(H_O\right)$



d. Représentation du diagramme de Bode. En jaune Q=0,1 ; en noir $Q=1/\sqrt{2}$; En bleu Q=4.

e. Observations.

La largeur de la bande passante du filtre s'exprime : $\boxed{\Delta x=\dfrac{1}{Q}}$ **ou** $\boxed{\Delta\omega=\dfrac{\omega_O}{Q}}$ **ou encore** $\boxed{\Delta f=\dfrac{f_O}{Q}}$

Pour assurer un filtrage de bonne qualité sur une bande passante étroite, notre préférence se portera donc sur un filtre de grand facteur de qualité.

5. Exemples de réalisation de fonction.

5.1. Réalisation d'une tension continue à partir du secteur.

Le courant délivré par EDF est un courant alternatif de fréquence f_O =50 Hz et d'amplitude A=220V qui peut donc s'exprimer si on le prend comme référence de phase sous la forme $e(t)=A\cos(2\pi f_O t)$

On souhaite réaliser une alimentation stabilisée délivrant une tension de 0 à 30V sous de faible ampérage. Pour cela, on doit produire une tension quasiment continue de valeur V_{Alim} avec un taux de distorsion faible.

On utilise d'abord un circuit redresseur qui produit à partir du signal du secteur le signal redressé double alternance : $r(t)=A|\cos(2\pi f_O t)|$

1. Faire une représentation graphique de ce signal. En déduire la fréquence fondamentale de la décomposition en série de Fourier. Déterminer la valeur moyenne de ce signal.

On donne la décomposition en série de Fourier $r(t)=\dfrac{2A}{\pi}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{4A}{\pi(4k^2-1)}\cos(4\pi k f_O t+k\pi)\right)$

2. Vérifier l'expression de la valeur moyenne calculée précédemment. Vérifier la cohérence de la fréquence fondamentale de cette décomposition avec le résultat précédent. Indiquer dans un tableau les valeurs de l'amplitude et de la fréquence pour le fondamental et les harmoniques de rang 2 à 6.

3. Expliquer qualitativement l'opération de filtrage qui doit être réalisée pour obtenir une tension fixe V_{Alim} en sortie ?

On ramène l'étude à une situation plus simple en négligeant toutes les harmoniques, on ne conserve donc que la composante constante et le fondamental du signal ce qui revient à prendre $r(t) \approx \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{3\pi}\cos(4\pi f_O t)$

On souhaite filtrer le signal pour obtenir une tension de sortie s(t) constante, avec un taux de variation de la tension qui reste inférieur à 1% qui sera donc de la forme $s(t) \approx V_{alim} - \delta V \cos(4\pi f_O t)$ avec $\delta V \leq 10^{-2} V_{alim}$

4. Indiquer la valeur G(0) du gain à fréquence nulle pour conserver toute la puissance électrique disponible dans la composante continue. Indiquer alors l'expression de V_{Alim}.
5. Indiquer alors la valeur $G(2f_O)$ du gain à la fréquence fondamentale pour respecter la consigne d'un taux de distorsion inférieur à 1%.

On envisage de faire cette opération avec un filtre d'ordre 1 de fréquence de coupure f_C.

6. Quelle valeur faut-il donnée à H_O ? Quelle valeur maximale faut-il donner à f_C ? On se contentera d'un raisonnement sur les formes asymptotiques de la fonction de transfert.

On envisage de réaliser l'opération avec un filtre passe bas d'ordre 2 de fréquence propre f_O et de facteur de qualité Q.

7. Quelle valeur faut-il donnée à H_O ? Quelle valeur faut-il donner à Q ? Quelle valeur maximale faut-il donner à f_C ? On se contentera d'un raisonnement sur les formes asymptotiques de la fonction de transfert.

5.2. Réalisation d'une sélection de bande de fréquences.

On considère le signal radio AM de la station RTL dont la fréquence de porteuse est donnée par f_P=234kHz.
Le standard de transmission pour la bande AM est d'enregistrer les émissions en limitant le spectre sonore enregistré à la bande [f_{min}=20Hz, f_{max}=4kHz]. Le principe de transmission par modulation d'amplitude (AM) produit alors un signal modulé s_m dont les fréquences sont comprises entre f_P-f_{max} et f_p+f_{max}.
Pour que les émissions des différentes stations ne soient pas toutes réceptionnées en même temps sur le poste radio, on leur assigne des fréquences de porteuse différentes. On observe dans le tableau d'assignation des fréquences que la porteuse de RMC est $f_{P,inf}$=216kHz et que la porteuse pour la radionavigation aéronautique est obligatoirement située au-dessus de 255kHz.

1. Faire une représentation sur un même graphique du spectre de l'émission de radio de la station RTL, de l'émission de la station RMC et de la bande de communication aéronautique.

On cherche à concevoir un filtre d'ordre 2 permettant d'écouter la station RTL en filtrant les émissions des autres stations.

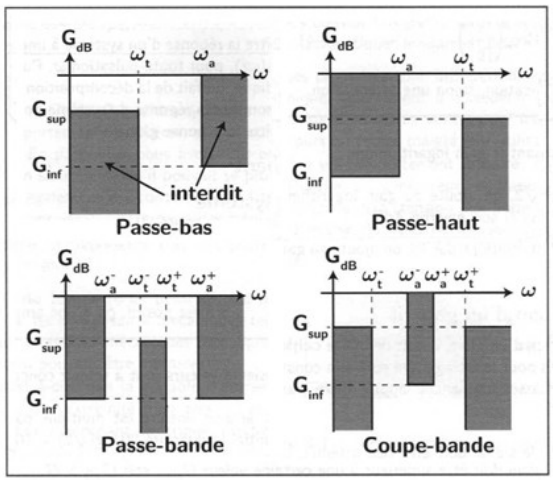
2. Quel type de filtre doit-on employer pour faire cette opération ? Donner la fonction de transfert si on suppose ce filtre d'ordre 2.
3. Quelle sera la fréquence propre et le facteur de qualité du filtre si on souhaite que l'ensemble du spectre du signal émis par la station RTL soit dans la bande passante du filtre.
4. Quel sera alors le gain du filtre pour les sons graves et le gain du filtre pour les sons les plus aigus transmis ? Commenter cette observation.
5. Quel sera le facteur d'atténuation de la fréquence de porteuse de la station RMC ? Quelle sera le facteur d'atténuation de la fréquence de porteuse minimale pour la radionavigation aéronautique.

5.3. Conception d'un filtre, représentation graphique des contraintes, gabarit.

a. <u>Démarche générale.</u>

On peut donc observer qu'à chaque situation, on doit concevoir un filtre qui réponde aux contraintes imposées par l'opération envisagée :

- Quelles sont les fréquences à conserver ? Quelles sont les fréquences à éliminer ? Quel est alors le type de filtre à utiliser ?
- Quel est le gain minimum pour les fréquences à conserver ? Quel est le gain maximum pour les fréquences à éliminer ?
- On peut réaliser un gabarit, c'est-à-dire la représentation graphique de ces contraintes sur un graphique représentant le gain en décibel en fonction de la pulsation, ou de la fréquence.



b. Exemple particulier : réalisation d'un moyenneur.

Un moyenneur est un filtre qui propose en sortie un signal continu égal à la moyenne temporelle du signal en entrée.
Pour un signal périodique de fréquence fondamentale f_F, on devra donc réaliser la sélection de composante suivante :

- Conserver la composante continue de fréquence nulle, éliminer toutes les composantes variables dont la composante de fréquence la plus faible c'est-à-dire le fondamental.
- On utilise donc un filtre passe bas dont on détermine la fréquence de coupure qualitativement comme nettement inférieure à f_F.
- Avec des critiques quantitatifs plus explicites, on peut fixer une valeur maximale de cette fréquence de coupure.

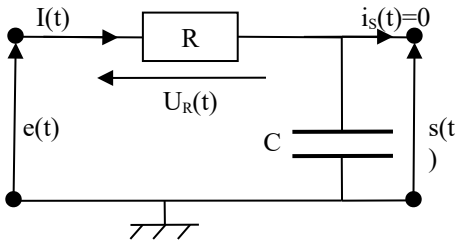
Capacités exigibles

- Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal.
- Etablir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal a la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associe à une fonction de transfert d'ordre 1.
- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire a une excitation sinusoïdale, a une somme finie d'excitations sinusoïdales, a un signal périodique.
- Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur.

Modèles de filtres linéaires passifs et actifs

1. Réalisation de filtre passif. Sans composant actif.

1.1. Exemple du circuit RC.



a. Le circuit et l'analyse qualitative.

On commence par analyser qualitativement le filtre :

A basse fréquence $|\underline{Z}_C|=\frac{1}{C\omega}\to+\infty$. On en déduit que I(t)=0 et que s(t)=e(t). Le circuit laisse passer les basses fréquences.

A haute fréquence $|\underline{Z}_C|=\frac{1}{C\omega}\to 0$. On en déduit que s(t)=0. Le circuit coupe les hautes fréquences. **Le circuit RC sera donc un filtre passe bas.**

b. Etablissement de la fonction de transfert.

On applique le diviseur de tension : $\underline{s}(t)=\frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_R}\underline{e}(t)=\frac{1}{1+jRC\omega}\underline{e}(t)$ On obtient $\underline{H}(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_O}}$ où $\omega_O=\frac{1}{RC}$

C'est la fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 1, son gain statique est unitaire, valeur maximale pour un filtre passif ne contenant que des dipôles consommant de la puissance électrique.

c. Impédance d'entrée et impédance de sortie.

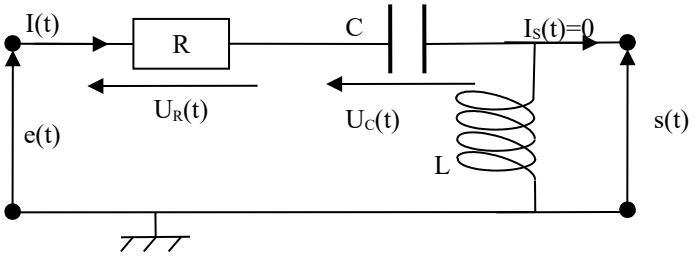
- **On détermine l'impédance d'entrée du circuit en imaginant qu'on branche en entrée du filtre un générateur, et en regardant l'impédance du dipôle qu'il voit.**

Ici le dipôle vu par le générateur branché en entrée sera l'association série du conducteur ohmique et du condensateur. L'impédance d'entrée s'écrit $\underline{Z}_E=R+\frac{1}{jC\omega}$.

- **On détermine l'impédance de sortie en imaginant qu'on branche en sortie du filtre un dipôle et en déterminant l'impédance du générateur qui l'alimente. Pour déterminer cette impédance on observe le circuit en éteignant les générateurs.**

Ici le dipôle vu par le dipôle branché en sortie sera l'association parallèle du conducteur ohmique et du condensateur. L'impédance de sortie s'obtient par $\frac{1}{\underline{Z}_S}=\frac{1}{R}+jC\omega$

1.2. Exemple du circuit RCL.



a. Le circuit et l'analyse qualitative.

On commence par analyser qualitativement le filtre :A basse fréquence $|\underline{Z}_C|\to+\infty$ et $|\underline{Z}_L|\to 0$. On en déduit s(t)=0. Le circuit coupe les basses fréquences.

A haute fréquence $|\underline{Z}_C|\to 0$ et $|\underline{Z}_L|\to+\infty$On en déduit que s(t)=e(t). Le circuit laisse passer les hautes fréquences.

Le circuit RCL sera donc un filtre passe haut.

b. Etablissement de la fonction de transfert.

On applique le diviseur de tension $\underline{s}(t)=\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_L+\underline{Z}_R}\underline{e}(t)=\frac{-LC\omega^2}{1+jRC\omega-LC\omega^2}\underline{e}(t)$

On obtient alors $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_O\left(-\frac{\omega^2}{\omega_O^2}\right)}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_O}-\frac{\omega^2}{\omega_O^2}}$ avec $\omega_O=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

C'est la fonction de transfert d'un filtre passe haut d'ordre 2, de gain statique unitaire, valeur maximale pour un filtre passif ne contenant que des dipôles consommant de la puissance électrique.

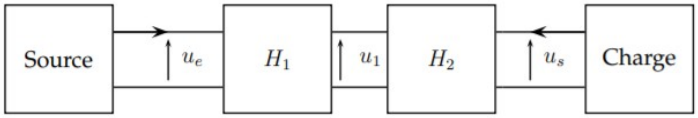
c. Impédance d'entrée et impédance de sortie.

Le dipôle vu par le générateur branché en entrée sera l'association série du conducteur ohmique, du condensateur et de la bobine. L'impédance d'entrée s'écrit $\underline{Z}_E=R+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega$

Le dipôle passif vu par le dipôle branché en sortie sera l'association parallèle de la bobine et de l'association série du conducteur ohmique et du condensateur. L'impédance de sortie s'obtient par : $\frac{1}{\underline{Z}_S}=\frac{1}{jL\omega}+\frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}$.

1.3. Mise en cascade de différents filtres linéaires.

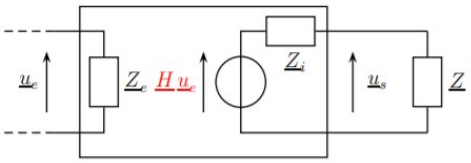
Pour réaliser une opération de filtrage, on est souvent amener à la décomposer en plusieurs étapes plus simples. On met alors en cascade plusieurs filtres.



Dans le cas idéal, la mise en cascade de deux filtres se mène de manière simple :

- Pour le premier étage, la tension en sortie s'obtient par $\underline{u}_1 = \underline{H}_1 \underline{u}_e$
- Pour le second étage, la tension en sortie s'obtient par $\underline{u}_s = \underline{H}_2 \underline{u}_1$
- La fonction de transfert totale est alors définie par $\underline{u}_S = \underline{H}_T \underline{u}_e$ et on en déduit que $\underline{H}_T = \underline{H}_1 \underline{H}_2$.

Dans la réalité, il ne faut pas oublier qu'on a établi la fonction de transfert en sortie ouverte, avec une intensité sortant du filtre nulle. La mise en cascade de deux filtres ne conduit pas dans tous les cas à la situation idéale précédente.



On modélise un filtre par un quadrupôle dont le schéma est donné ci-contre :

Supposons que ce schéma est utilisé pour les deux filtres mis en cascade :

- Pour le premier filtre, le générateur de tension idéal délivre la tension voulue $(\underline{u}_1)_{i=0} = \underline{H}_1 \underline{u}_e$, qui est bien celle obtenue en boucle ouverte puisqu'alors aucun courant ne passe dans $\underline{Z}_{S1}$
- Si on connecte le second filtre, on peut réaliser un diviseur de tension pour exprimer la tension en sortie du premier filtre ce qui donne $(\underline{u}_1) = \underline{H}_1 \underline{u}_e \left(\dfrac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{S1}} \right)$
- On observe que la tension obtenue en sortie n'est pas celle qu'on obtient en boucle ouverte.

En pratique, les techniciens qui vont mettre en œuvre les chaines de traitement des signaux souhaitent travailler de manière simple, en supposant que le cas idéal s'appliquent.

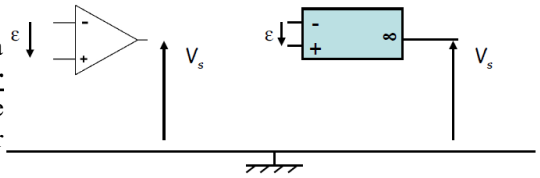
Les filtres linéaires sur des signaux représentés par des tensions doivent être conçus :
- pour présenter des résistances d'entrée grandes. On peut citer l'exemple de l'oscilloscope ~1 MΩ.
- Pour présenter des résistances de sortie petites. On peut citer l'exemple d'un GBF ~ 50 Ω.

2. Présentation de l'ALI et des montages de base.

2.1. Présentation de l'ALI en régime linéaire.

a. Le schéma de l'ALI.

L'ALI est un composant électronique actif, il peut fournir de la puissance à un circuit électronique. **Cette puissance est fournie par une alimentation stabilisée en tension (-Vsat, 0, +Vsat).** Sur le schéma de l'ALI, on trouve les trois bornes essentielles pour comprendre le fonctionnement du composant :



- Deux bornes d'entrée, l'entrée inverseuse repérée par le symbole – et l'entrée non inverseuse repérée par le symbole +.
- La borne de sortie « au bout du triangle » ou repérée par le symbole ∞. L'ALI délivre un potentiel de sortie dont la valeur est comprise entre –Vsat et +Vsat.

L'ALI joue le rôle d'un amplificateur de tension prenant comme entrée la tension de décalage $\varepsilon = V_+ - V_-$ et comme sortie le potentiel V_S de la borne de sortie mesurée par rapport à la masse du circuit.

b. Modèle de l'ALI idéal en fonctionnement linéaire.

On utilise l'ALI dans un contexte unique dont il faut retenir les hypothèses et les conditions de réalisation :**Pour un ALI idéal, la résistance d'entrée est supposée infinie**, en conséquence de quoi les courants, dits de polarisation, entrant dans les bornes + et – sont d'intensité nulle : $\boxed{i^+ = i^- = 0}$ **Et pour un ALI idéal, la résistance de sortie est supposée nulle**, toutefois le courant de sortie de l'ALI idéal est limité par l'intensité de saturation i_{Sat}.

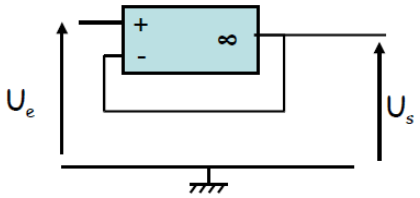
Pour un ALI idéal et EN FONCTIONNANT EN RÉGIME LINÉAIRE, on fait l'hypothèse que les potentiels des deux entrées sont égaux $\boxed{V^+ = V^-}$ **La condition nécessaire pour que l'ALI idéal fonctionne en régime linéaire est la présence d'une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse.**

2.2. Montage suiveur ; adaptation d'impédance.

a. Le schéma du suiveur.

On remarque que ce montage présente une « boucle de rétroaction » sur la borne inverseuse. On suppose donc que le circuit fonctionne en régime linéaire, on a les relations suivantes : $V_E = V^+$ $V^+ = V^-$ $V^- = V_S$

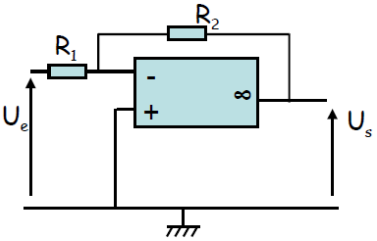
On obtient donc la relation entrée sortie : $\boxed{V_E = V_S}$



b. Impédance d'entrée du suiveur.

L'impédance d'entrée du circuit suiveur est égale à la résistance d'entrée de la borne non inverseuse de l'ALI, elle est donc infinie et elle permet de toujours réaliser l'adaptation d'impédance entre les étages d'un filtre complexe. On l'utilise souvent dans les montages présentant des problèmes d'adaptation d'impédance en l'insérant entre les deux étages concernés.

2.3. Montage amplificateur inverseur.



a. Le schéma de l'amplificateur.

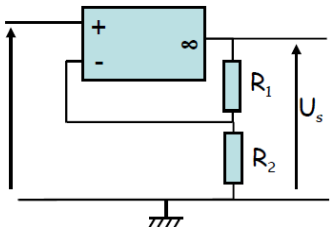
On constate la présence d'une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse, on peut faire l'hypothèse d'un régime linéaire. On se place dans le modèle de l'ALI idéal alors $V^- = V^+$ de plus $V^+ = 0$

La LNP en - donne $\frac{V_E - V^-}{R_1} + \frac{V_S - V^-}{R_2} = 0$ **D'où** $\boxed{V_S = -\frac{R_2}{R_1} V_E}$

b. Impédance d'entrée.

Pour déterminer l'impédance d'entrée, on reprend la définition : $\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e} = R_1$

2.4. Montage amplificateur non inverseur.



a. Le schéma de l'amplificateur.

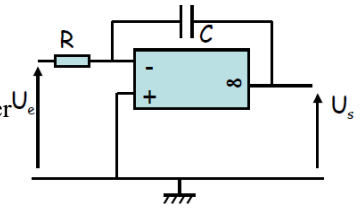
Le circuit présente une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse, on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire. On reste dans le modèle de l'ALI idéal. On peut écrire la relation $V^+ = V^-$ de plus $V^+ = V_E$

Un % de tension donne $V^- = \frac{R_2 V_S}{R_1 + R_2}$ **d'où** $V_S = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_E$

b. Impédance d'entrée.

L'impédance d'entrée de l'amplificateur non inverseur est égale à la résistance d'entrée de la borne non inverseuse de l'ALI, elle est donc infinie.

2.5. Circuit intégrateur.



a. Le montage intégrateur.

Le circuit présente une boucle de rétroaction sur la borne inverseuse, on peut supposer qu'il fonctionne en régime linéaire. On utilise toujours le modèle de l'ALI idéal.

Dans le cadre d'étude : $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$

LNP en - $jC\omega\left(\underline{V}_S - \underline{V}^-\right) + \frac{\underline{V}_E - \underline{V}^-}{R} = 0$

On obtient la fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = -\frac{1}{\mathrm{RC}} \frac{1}{j\omega}$

Si on revient aux notations réelles : $RCj\omega \underline{V}_S = -\underline{V}_E \Leftrightarrow \frac{dV_S}{dt} = -\frac{1}{\mathrm{RC}} V_E$ soit : $\boxed{V_S = -\frac{1}{\tau}\int V_E \mathrm{dt}}$

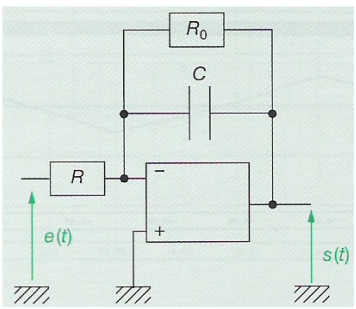
On a bien alors réalisé un circuit intégrateur.

b. Impédance d'entrée du circuit intégrateur.

Pour déterminer l'impédance d'entrée, on reprend la définition : $\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e} = R$

3. Quelques exemples de traitement de signaux avec circuit à ALI.

3.1. Circuit pseudo intégrateur. Réalisation d'un filtre passe bas actif.



a. Etablissement de la fonction de transfert.

On considère le circuit suivant pour lequel on observe une boucle de rétroaction sur l'entrée inverseuse. On peut faire l'hypothèse d'un régime linéaire. On applique le modèle de l'ALI idéal. Pour les potentiels en entrée on obtient $\underline{V}^+ = \underline{V}^- = 0$

LNP $\left(jC\omega + \frac{1}{R_O}\right)\left(\underline{V}_S - \underline{V}^-\right) + \frac{\underline{V}_E - \underline{V}^-}{R} = 0$:

On obtient $\underline{H}(j\omega) = \frac{-R_O/R}{1 + jR_O C\omega} = \frac{H_O}{1 + j\frac{\omega}{\omega_O}}$ où $H_O = -R_O/R$ et $\omega_O = 1/R_O C$

b. Utilisation du montage en filtre actif passe bas.

Ce montage peut être utilisé si on souhaite réaliser un filtre passe bas et amplifier le signal basse fréquence sélectionné. On peut alors jouer sur les valeurs de R, R_O et C pour régler la pulsation de coupure et le gain statique. On peut noter que l'impédance d'entrée du circuit s'identifie avec la valeur de la résistance R placée en entrée. Cette dernière doit donc être prise assez grande pour éviter les problèmes d'adaptation d'impédance.

c. Utilisation du montage en pseudo-intégrateur.

Ce circuit est une version amélioré du circuit intégrateur pur. Pour comprendre l'intérêt du circuit, étudions une situation courante :

- On réalise un signal créneau de valeur maximale E_O et de valeur minimal $-E_O$ et de fréquence fondamentale f_O. La valeur moyenne théorique est donc nulle.
- Lorsqu'on demande au GBF de réaliser ce signal, il ne fonctionne jamais de manière idéal et il délivre toujours une tension continue δE.

Si on envisage d'intégrer ce signal avec un circuit intégrateur pur de fonction de transfert $\underline{H}=\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}=-\frac{1}{\tau}\frac{1}{j\omega}$ **avec** $\tau=RC$**.** On intègrele signal créneau théorique ce qui donnera :

- Lorsque le signal vaut E_O : $V_S=\frac{-1}{\tau}\int E_O dt$ d'où $V_S(t)=A-E_O\frac{t}{\tau}$
- Lorsque le signal vaut $-E_O$: $V_S=\frac{-1}{\tau}\int -E_O dt$d'où $V_S(t)=A'+E_O\frac{t}{\tau}$

On aboutira à un signal triangle de moyenne nulle, on peut écrire $V_S(t=0)=V_S(t=T)=A$ et $V_S\left(t=T/2\right)=-A$

$$\begin{cases} V_S\left(t=T/2\right)=-A=A'+E_O\frac{T}{2\tau} \\ V_S\left(t=T/2\right)=A=A'+E_O\frac{T}{\tau} \end{cases} \text{ d'où} \begin{cases} A=E_O\frac{T}{4\tau} \\ A'=-E_O\frac{3T}{4\tau} \end{cases} \text{ On obtient } \begin{cases} V_S(t)=\frac{E_O}{\tau}\left(\frac{T}{4}-t\right) & si \quad 0<t\le T/2 \\ V_S(t)=\frac{E_O}{\tau}\left(t-\frac{3T}{4}\right) & si \quad T/2<t\le T \end{cases}$$

un signal triangle de période T, de valeur maximale$E_O\frac{T}{4\tau}$et de valeur minimale$-E_O\frac{T}{4\tau}$

Mais on intègre aussi la composante continue qui vient du caractère non idéal du GBF :

$V_S=\frac{-1}{\tau}\int \delta E\, dt$ ce qui donne $V_S(t)=-\delta E\frac{t}{\tau}$

Prenons des valeurs de référence pour la résistance R=1kΩ et la capacité $C=10^{-7}$F, on obtient un temps caractéristique $\tau=10^{-3}$s. Prenons un défaut de tension δE=10mV. La durée pour que le circuit atteigne en sortie la tension d'alimentation $-V_{sat}$ qui limite le fonctionnement linéaire de l'amplificateur est$T_{sat}=\tau\frac{V_{sat}}{\delta E}\approx 15\,s$. On observe donc qu'assez rapidement, le circuit ne fonctionnera plus selon un régime linéaire et qu'il n'effectuera plus l'opération d'intégration.

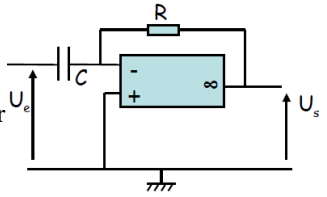
Si on envisage d'intégrer ce signal avec le circuit pseudo-intégrateur de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_O}{1+j\frac{\omega}{\omega_O}}$

où $H_O=\frac{-R_O}{R}$ **et** $\omega_O=\frac{1}{R_O C}$**:**

Pour la composante continue de fréquence nulle, la fonction de transfert prend la forme$\underline{H}(0)=H_O$, elle n'est donc pas intégrée mais simplement multipliée par H_O.

Pour les composantes sinusoïdales, on souhaite un comportement intégrateur avec une fonction de transfert de la forme $\underline{H}(j\omega)=\frac{H_O\omega_O}{j\omega}=-\frac{1}{\tau}\frac{1}{j\omega}$ avec$\tau=RC$. En plaçant le fondamental du signal est dans le domaine HF, on s'assurera que c'est bien le cas et on intégrera le signal amputé de sa composante continue problématique.

3.2. Circuit dérivateur.



a. Etude du circuit et conclusion.

Le circuit présente une boucle de rétroaction sur la borne inverseuse, on peut supposer qu'il fonctionne en régime linéaire. On reste dans le modèle de l'ALI idéal.

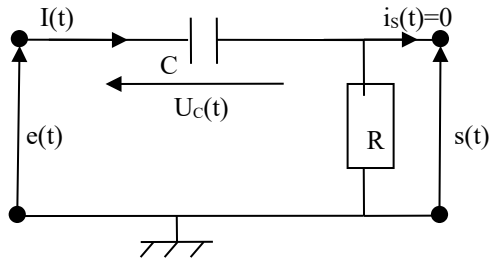
Déterminons sa fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé : $\underline{V^+}=\underline{V^-}=0$

LNP sur la borne - : $jC\omega\left(\underline{V_E}-\underline{V^-}\right)+\frac{\underline{V_S}-\underline{V^-}}{R}=0$ On obtient la fonction de transfert : $\underline{H}=\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}=-RCj\omega$

On revient alors aux notations réelles : $RCj\omega\underline{V_E}=-\underline{V_S} \Leftrightarrow \boxed{V_S=-\tau\frac{dV_E}{dt}}$

Ce circuit présente donc une fonction de transfert qui se traduit en comportement dérivateur quelle que soit la fréquence envisagée. Tous les signaux périodiques seront donc dérivés.

b. Comparaison avec le cas d'un passe haut passif.



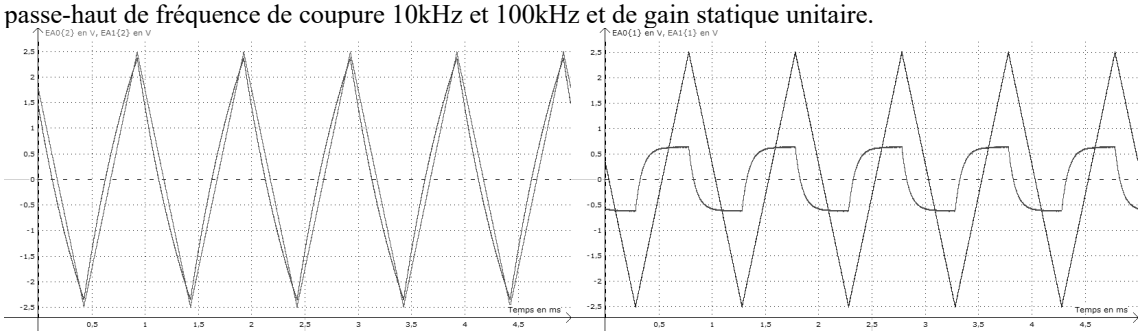
Pour ce circuit, on établit la fonction de transfert facilement :

Diviseur de tension: $\underline{s}(t)=\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_R}\underline{e}(t)=\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{e}(t)$

on obtient alors $\underline{H}(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{\omega_O}}{1+j\frac{\omega}{\omega_O}}$ avec $\omega_O=\frac{1}{RC}$

- On observe donc que si $\omega<<\omega_O$ la fonction de transfert prend la forme $\underline{H}(j\omega)=j\frac{\omega}{\omega_O}$ et donc présentera un comportement dérivateur.
- On observe que si $\omega>>\omega_O$ la fonction de transfert prend la forme $\underline{H}(j\omega)=1$ transmettant le signal dans cette bande de fréquence.

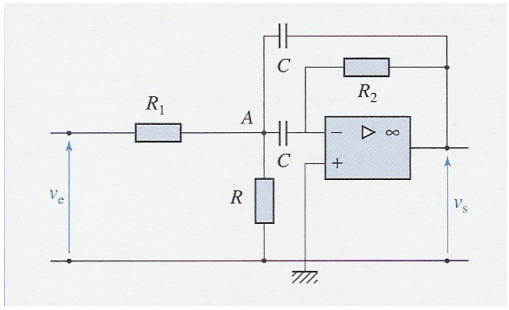
Expérimentalement, on observe les résultats suivants sur un signal triangle de fréquence 1kHz à l'entrée d'un filtre passe-haut de fréquence de coupure 10kHz et 100kHz et de gain statique unitaire.



f_C = 10 kHz f_C = 100 kHz

On observe expérimentalement que pour obtenir un signal qui prend l'allure d'un créneau à partir d'un signal triangle , il est très difficile de le réaliser avec un filtre passe haut passif classique. La solution du circuit dérivateur est avantageuse car on pourra dériver toutes les composantes de la décomposition en série de Fourier.

3.3. Circuit filtre passe-bande.



- Etude du comportement qualitatif de ce filtre.
- Détermination de la fonction de transfert.

Capacités exigibles

- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire a une excitation sinusoïdale, a une somme finie d'excitations sinusoïdales, a un signal périodique.
- Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant qu'intégrateur ou dérivateur.
- Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).
- Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire.
- Etablir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur.
- Déterminer les impédances d'entrée de ces montages.