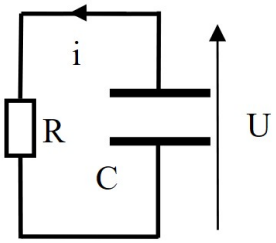
Résolution de problèmes : durée d'un éclair.



Le bas du nuage et le sol sont modélisables comme un condensateur de capacité C ; le canal de décharge est modélisable par un conducteur ohmique de résistance R qui lie les deux armatures du condensateur, on aboutit au schéma électrique ci contre :

On écrit la loi d'Ohm $U=Ri$ et la relation constitutive du condensateur $i=-C\frac{dU}{dt}$

On obtient l'équation différentielle $\frac{dU}{dt}+\frac{1}{\tau}U=0$ avec $\tau=RC$

La tension s'écrit $U=U_{max}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ L'intensité s'écrit $i=\frac{U_{max}}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ On en déduit que $R=\frac{U_{max}}{i_{max}}$

L'énergie stockée s'écrit $E_C=\frac{C}{2}U_{max}^2$ on en déduit que $C=\frac{2E_C}{U_{max}^2}$

Finalement $\tau=RC=\frac{2E_C}{U_{max}i_{max}}$

Il reste à exprimer t_{99} par la relation $U(t_{99})=\frac{U_{max}}{100}$ ce qui donne $t_{99}=\tau\ln(100)$

Finalement on exprime la durée de l'éclair par $t_{99}=\frac{2E_C}{U_{max}i_{max}}\ln(100)$

L'application numérique donne : $t_{99}=1{,}5.10^{-4}\,s$

Cette durée est courte mais parfaitement raisonnable pour un éclair qui est effectivement un évènement lumineux très rapide.

Problème 1 : Thermistances et montages thermométriques.

Etude du montage simple :

1. La relation du diviseur de tension donne ici $\boxed{V_R = \frac{R(T)}{R(T)+R_1+R_S} e_S}$
2. La variation de tension est alors $\boxed{\delta V_R = V_R(T_O+\delta T) - V_R(T_O) = \left(\frac{R(T_O)+\delta R}{R(T_O)+\delta R+R_1+R_S} - \frac{R(T_O)}{R(T_O)+R_1+R_S} \right) e_S}$

Ce qui donne $\delta V_R = \left(\frac{\delta R (R_1+R_S)}{(R(T_O)+\delta R+R_1+R_S)(R(T_O)+R_1+R_S)} \right) e_S$

En tenant compte de la faiblesse de δR en comparaison des autres résistances $\boxed{\delta V_R = \frac{\delta R (R_1+R_S)}{(R(T_O)+R_1+R_S)^2} e_S}$

3. La variation de tension qu'on s'attend à observer prend la valeur $\delta V_1 = 6.10^{-2} V$

L'incertitude sur les lectures de tension pour ce calibre du voltmètre s'évalue alors à $u(V_1) = 2{,}3.10^{-3} + 3.10^{-2}$ lorsqu'on traduit la phrase (0,1%+3digits) ce qui donne $u(V_1) \approx 3.10^{-2}$.

La différence de tension à étudier est de l'ordre de l'incertitude sur la valeur affichée par le voltmètre. Dans ces conditions, on ne pourra évidemment pas étudier précisément la variation de la tension.

Etude du pont de Wheatstone :

4. On décompose la tension U_{AB} par la relation de Chasles $U = U_{AD} + U_{DB}$

Par la relation du diviseur de tension, applicable car aucun courant ne circule dans la branche AB, on obtient les expressions : $U_{AD} = \frac{R(T)}{R(T)+R_1} e_S$ et $U_{BD} = \frac{R_4}{R_3+R_4} e_S = -U_{DB}$

On obtient alors $U = \frac{R(T)}{R(T)+R_1} e_S - \frac{R_4}{R_3+R_4} e_S$ et finalement $\boxed{U = \frac{R_T R_3 - R_1 R_4}{(R(T)+R_1)(R_3+R_4)} e_S}$

5. L'équilibre du pont est réalisé si la tension U est nulle, la relation à vérifier est $\boxed{R_T R_3 - R_1 R_4 = 0}$
6. On exprime la tension : $\delta U = U(T_{eq}+\delta T) - U(T_{eq}) = \frac{(R(T_{eq})+\delta R) R_3 - R_1 R_4}{((R(T_{eq})+\delta R)+R_1)(R_3+R_4)} e_S - 0$

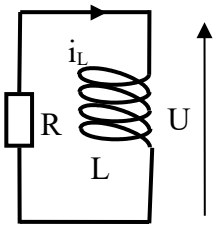
Après développement et utilisation de la relation d'équilibre du pont : $\boxed{\delta U = \frac{R_3 \delta R}{(R(T_{eq})+\delta R+R_1)(R_3+R_4)}}$

On peut alors simplifier en supposant δR petite devant les autres résistances $\boxed{\delta U = \frac{R_3 \delta R}{(R(T_{eq})+R_1)(R_3+R_4)}}$

7. Les expressions obtenues pour δV_R et δU sont similaires. Cependant le pont de Wheatstone permet de partir d'une valeur nulle de la tension et permettra donc de régler le Voltmètre sur un calibre adapté à la mesure de δU, on règle ainsi le problème qu'on observait dans le montage utilisant une simple configuration diviseur de tension.

Problème 2 : Diode de roue libre.

1. Lorsque l'interrupteur est ouvert la tension aux bornes de la diode est directement imposée par la source de tension idéale et elle s'exprime $U_D=-E$ On en déduit que $U_D<0$ ce qui implique que **la diode est dans l'état bloqué et qu'elle est équivalente à un interrupteur ouvert**.
2. En régime stationnaire, une bobine est équivalente à un fil.
3. Le circuit correspond à la source de tension idéale de fem E alimentant directement le conducteur ohmique de résistance R. On obtient alors $\boxed{i_L(t<0)=\frac{E}{R}}$
4. L'énergie stockée dans la bobine s'exprime $E_L=\frac{1}{2}Li_L^2=\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2$ A.N : $E_L=2{,}5.10^2\,J$
5. Par continuité de l'intensité traversant une bobine, on peut affirmer que $\boxed{i_L(t=0^+)=\frac{E}{R}}$



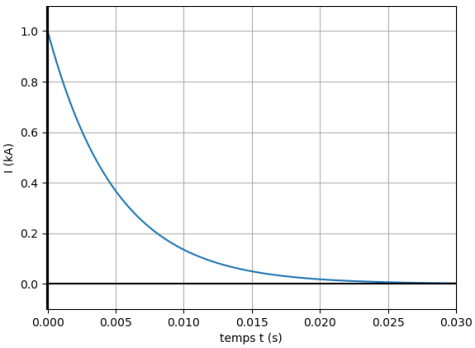
Puisque l'interrupteur est ouvert $i_D=i_L$. **L'intensité i_D est donc positive et la diode est passante.** Le circuit équivalent est donné ci contre.

6. On écrit la loi d'Ohm pour le résistor en convention générateur $U=-Ri_L$

On écrit la loi de comportement de la bobine en convention récepteur $U=L\frac{di_L}{dt}$

On en déduit que $L\frac{di_L}{dt}=-Ri_L$ et on obtient bien $\boxed{\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{\tau}i_L=0}$ par identification $\boxed{\tau=\frac{L}{R}}$ A.N : $\boxed{\tau=5.10^{-3}\,s}$

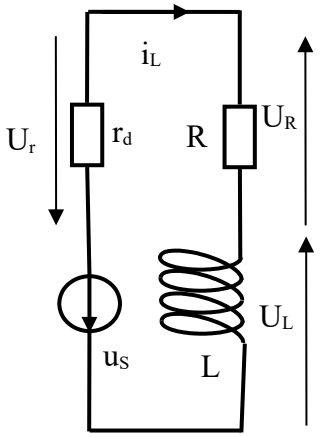
7. La solution générale de cette équation différentielle homogène s'écrit $S_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$



On applique les conditions initiales $i_L(t=0^+)=\frac{E}{R}=A$ On obtient finalement $\boxed{i_L(t)=\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

Cette intensité reste positive sur l'intervalle (t>0) ; la diode reste donc bien passante.

8. Pour la courbe on obtient l'allure ci contre pour E/R=1kA et τ=5ms.
9. On observe à nouveau que la diode est passante après que l'interrupteur K soit ouvert. Le circuit équivalent est alors le suivant :



10. On écrit la loi des mailles : $u_S+U_r+U_R+U_L=0$

La loi d'Ohm donne : $U_r=r_d i_L$ et $U_R=Ri_L$; Pour la bobine : $U_L=L\frac{di_L}{dt}$

On obtient alors : $L\frac{di_L}{dt}+(r_d+R)i_L=-u_S$

Sous forme canonique, $\boxed{\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{\tau_d}i_L=-\frac{u_S}{(r_d+R)\tau_d}}$ par identification $\boxed{\tau_d=\frac{L}{(R+r_d)}}$

11. La SGEH s'écrit $S_H(t)=A_d\exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right)$, la SPEC s'écrit $S_P=-\frac{u_S}{r_d+R}$

la SGEC s'écrit donc $S_G=-\frac{u_S}{r_d+R}+A_d\exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right)$

On applique les conditions initiales $i_L(t=0)=\frac{E}{R}=-\frac{u_S}{r_d+R}+A_d$ d'où $\boxed{i_L(t)=-\frac{u_S}{r_d+R}+\left(\frac{E}{R}+\frac{u_S}{r_d+R}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right)}$

12. La diode reste passant tant que l'intensité du courant reste positive, on peut donc déterminer l'instant t_b à partir duquel la diode repasse en mode bloquée par $i_L(t_b)=0$ ce qui donne $\boxed{t_b=\tau_d\ln\left(1+\frac{(r_d+R)E}{Ru_S}\right)}$

Problème 3 : Stratégie de charge des super condensateurs.

1. L'analyse donne :

- La rame parcourt une distance de 400m à la vitesse de 4m.s^{-1} ce qui donne une durée du trajet en autonomie de Δt=100s. Pendant cette durée les moteurs développent une puissance de P=500kW.

L'énergie totale nécessaire au trajet est alors estimée à $E_{tot}=P.\Delta t=5{,}0.10^7$J soit 50MJ.

- Cette énergie est fournie par les 50 condensateurs de capacité C ce qui donne avec l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur $E_{tot}=50\,C\dfrac{U^2}{2}$ où U est la tension d'alimentation du tram c'est-à-dire 1000V. On obtient alors $\boxed{C=\dfrac{E_{tot}}{25\,U^2}=2\,F}$ une valeur énorme comparée aux capacités des condensateurs usuellement utilisés en TP de l'ordre du µF au maximum.
- Pour estimer la résistance R du circuit de charge, on exploite la donnée fournie de t_{charge}=20s pour recharger les condensateurs au passage en station. Le temps caractéristiques de charge est donné par le produit RC, et la durée totale de charge peut être estimée à 5.RC. On en déduit que $\boxed{R=\dfrac{t_{charge}}{5C}=2\,\Omega}$ une résistance effectivement très faible.

Premier procédé de charge.

2. Le temps caractéristique de la charge est $\tau=RC$ pour ce circuit RC série.

La tension est continue aux bornes du condensateur, on en déduit $u_C(t=0)=0$

A l'aide d'un circuit équivalent en régime stationnaire avec l'interrupteur K sur la position (2) $u_C(t=5\tau)=E$

3. Au cours de la charge, l'énergie stockée dans le condensateur est $\boxed{E_{stockée}=\dfrac{C}{2}\left(u_c^2(t=5\tau)-u_c^2(0)\right)=\dfrac{CE^2}{2}}$

4. Le générateur fournit la puissance $P_{géné}=E\,i(t)$

L'énergie totale fournie est $E_{fournie}=\int\limits_{charge}P_{géné}(t)=\int\limits_{charge}E\,i(t)=\int\limits_{t=0}^{t=5\tau}E\,C\dfrac{du_C}{dt}dt=CE\left(u_c(t=5\tau)-u_c(0)\right)$

On obtient finalement $\boxed{E_{fournie}=CE^2}$.

5. Le rendement de la charge est alors $\boxed{\eta=\dfrac{E_{stockée}}{E_{fournie}}=\dfrac{1}{2}}$ Ce rendement ne dépend absolument pas de R et ne peut donc pas être modifié en jouant sur la valeur de cette résistance.

Second procédé de charge.

6. En reprenant les raisonnements de la première partie : $u_C(t=0)=0$; $u_C(t=5\tau)=E/2$ et $u_C(t=10\tau)=E$

Alors pour la première phase : $E_{fournie,1}=\int\limits_{t=0}^{t=5\tau}\dfrac{E}{2}C\dfrac{du_C}{dt}dt=CE\left(u_c(t=5\tau)-u_c(0)\right)=\dfrac{C}{4}E^2$

pour la seconde phase $E_{fournie,2}=\int\limits_{t=5\tau}^{t=10\tau}E\,C\dfrac{du_C}{dt}dt=CE\left(u_c(t=10\tau)-u_c(5\tau)\right)=\dfrac{C}{2}E^2$

On obtient finalement l'énergie totale fournie est $E_{fournie}=E_{fournie,1}+E_{fournie,2}=\dfrac{3C}{4}E^2$.

7. L'énergie stockée au final est la même qu'avec le premier procédé alors le rendement est $\boxed{\eta=\dfrac{2}{3}}$.

Ce second procédé amène à un rendement de la charge amélioré mais demandera plus de matériel (deux générateurs) et un pilotage de l'interrupteur précis.

Généralisation à une charge en N étapes.

8. Lors de l'étape k de la charge

$$E_{fournie,k}=\int\limits_{t=(k-1)5\tau}^{t=k5\tau}\frac{kE}{N}C\frac{du_C}{dt}dt=C\frac{kE}{N}\left(u_c(t=k\tau)-u_c((k-1)\tau)\right)=C\frac{kE}{N}\left(\frac{kE}{N}-\frac{(k-1)E}{N}\right)=C\frac{k}{N^2}E^2$$

Alors $E_{fournie}=\sum\limits_{k=1}^{N}E_{fournie,k}=\dfrac{C}{N^2}E^2\sum\limits_{1}^{N}k=C\,E^2\dfrac{N+1}{2N}$

L'énergie totale stockée est toujours la même et le rendement est alors bien donné par $\boxed{\eta=\dfrac{N}{N+1}}$