Mesures et incertitudes

Le plan du cours

I. Variabilité de la mesure d'une grandeur physique
   1. La variabilité en science expérimentale
   2. Incertitude-type
   3. Écriture du résultat d'une mesure
   4. Comparaison de deux valeurs, écart normalisé

II. Estimation de l'incertitude-type
   1. Évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (type A)
   2. Évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (type B)
   3. Cas où il y a plusieurs sources de variabilité

III. Incertitudes-types composées
   1. Évaluation par le calcul
   2. Évaluation par une simulation numérique, méthode Monte-Carlo

IV. Régression linéaire
   1. Validation des résultats par analyse des écarts-normalisés
   2. Évaluation des incertitudes sur les paramètres du modèle par simulation Monte-Carlo

Le programme

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	*Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.* *Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).* *Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).* *Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.*
Incertitudes-types composées.	*Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.* *Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.* *Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.*
Écriture du résultat d'une mesure.	*Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.*
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	*Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.* *Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.*
Régression linéaire.	*Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle.* *Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.*

	Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

Le cours

I. Variabilité de la mesure d'une grandeur physique

1. La variabilité en science expérimentale

On appelle mesure une procédure expérimentale qui conduit à attribuer un *ensemble de valeurs numériques* à une grandeur, accompagné d'une *unité appropriée*.
Une telle expérience constitue un processus généralement complexe qui se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure. Cette variabilité peut provenir de nombreux facteurs, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure ;
- les conditions environnementales et leurs fluctuations ;
- les instruments de mesure ;
- le processus physique lui-même
- la personne réalisant l'expérience.

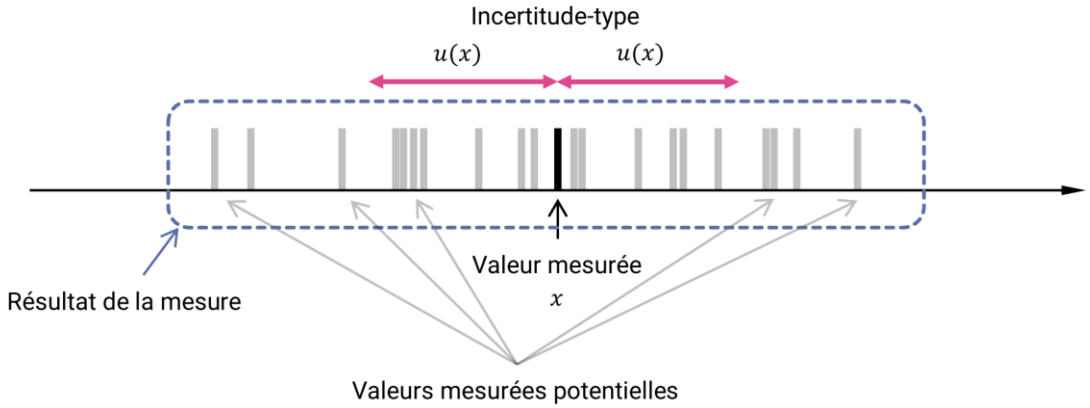
2. Incertitude-type

La meilleure estimation possible de la grandeur mesurée x est donnée par la moyenne arithmétique $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ pour un ensemble de N mesures x_i .

L'incertitude-type $u(x)$, quantifiant la variabilité de la mesure de x, est estimée à l'aide de l'écart-type qui traduit la dispersion des valeurs obtenues lors du processus de mesure :

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x)^2}$$

Par définition, ***l'incertitude-type*** $u(x)$ correspond à ***l'écart-type*** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure x .



Incertitude-type relative **:** On peut également définir l'incertitude-type relative, la grandeur $u(x)/\overline{x}$, que l'on donne généralement en pourcentage.

3. Écriture du résultat d'une mesure

Le résultat d'une mesure doit inclure :

- La **valeur mesurée**, sous la forme $x = ...$ en précisant l'unité.
  Le *nombre de décimales* sera fixée par celui de l'incertitude-type.

- L' **incertitude-type** associée, sous la forme $u(x) = ...$ en utilisant *la même puissance de 10*, que celle de la valeur mesurée (pour une meilleure visibilité), et bien sûr *la même unité*.
  On limite en général le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude-type à *deux* en arrondissant toujours par valeur supérieure.

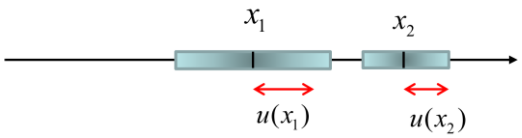
On pourra éventuellement employer la notation $x \pm u(x)$, mais il faut alors bien préciser que ce qui suit le $\pm$ est l'*incertitude-type*. Dans ce cas, la puissance de 10 doit être commune et en facteur.

Exemple : $L = 100\ \text{m}$, $u(L) = 1{,}54\ \text{cm}$ se réécrit $L = 100{,}000\ \text{m}$, $u(L) = 0{,}016\ \text{cm}$, ou encore, de manière condensée $L = (100{,}000 \pm 0{,}016)\ \text{m}$ (*où ce qui suit le $\pm$ est l'incertitude-type*).

Application : exercice 1

4. Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.



L' ***écart normalisé*** E_N (ou ***z-score***) entre deux processus de mesure donnant les valeurs x_1 et x_2, d' incertitude-types $u(x_1)$ et $u(x_2)$, est défini par :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Par convention, les deux valeurs seront considérées comme compatibles si leur écart normalisé vérifie $E_N \leq 2$.

Que conclure dans le cas d'un z-score supérieur à 2 ? Il est possible que l'incertitude-type ait été sous-estimée, ou qu'une source d'incertitude ait été oubliée ; il convient donc de réexaminer les choix qui ont mené à son évaluation. Mais il est possible que l'expérience n'ait pas été correctement réalisée… Il est également possible qu'une loi physique ne soit valable que dans un domaine plus restreint de paramètres que celui qu'on explore.

Application : exercice 2

II. Estimation de l'incertitude-type

1. Évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A)

On se place dans le cas où on a effectué plusieurs observations, et qu'elles ne sont pas toutes identiques. Une évaluation de nature statistique peut alors être envisagée.

L'**incertitude-type associée à une observation <u>unique</u>** exprime la variabilité potentielle d'une observation. Elle quantifie les fluctuations typiques d'une observation à l'autre. Comme on dispose de plusieurs observations, cette variabilité n'est autre que leur dispersion. Pour l'évaluer, on utilise l'écart-type de l'ensemble des observations réalisées :

$$u(x) = s_x$$

Quand la valeur mesurée $\overline{x}$ est la moyenne de N observations, on évalue **l'incertitude-type associée à cette moyenne unique** avec :

$$u(\overline{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{N}}.$$

2. Évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B)

On se place ici dans le cas où on n'a pu réaliser qu'une observation unique, ou bien dans le cas où la répétition des observations conduit exactement à la même valeur. La difficulté dans ce cas est de retrouver la variabilité intrinsèque à la mesure, qui est masquée par l'appareil employé (la variabilité est plus faible que la précision de l'appareil).

Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\overline{x}$ la valeur centrale de cette plage et a sa demi-largeur. L'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\overline{x}-a, \overline{x}+a]$ et l'incertitude-type est donnée par :

$$u(\overline{x}) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

La valeur de a doit être la plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Par exemple :

- Avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $a = 0,25 \text{ mm}$, tandis que si la valeur tombe entre deux graduations, on prendra plus logiquement $a = 0,5 \text{ mm}$
- Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. On supposera que l'incertitude affichée sur la notice (ou la précision, ou la tolérance) est un intervalle a de certitude de trouver la mesure.

3. Cas de plusieurs sources de variabilité

Si plusieurs phénomènes interviennent dans la variabilité d'une mesure, il convient d'additionner de façon quadratique les diverses incertitudes-type associées :

$$u(x) = \sqrt{u_1(x)^2 + u_2(x)^2}$$

III. Incertitudes-types composées

Dans le cas d'une mesure indirecte, on cherche à évaluer l'incertitude-type d'une grandeur calculée y à partir d'une ou plusieurs grandeurs mesurées x_i.

1. Évaluation par le calcul

Le tableau ci-dessous donne les deux formules à connaître pour calculer explicitement l'incertitude-type d'une grandeur y obtenue à partir des grandeurs x_1 et x_2 :

Relation	Incertitude
$y = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$	*Incertitude-type* $u(y) = \sqrt{\left(a \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(b \cdot u(x_2)\right)^2}$

$y = k \cdot x_1^a \cdot x_2^b$	*Incertitude-type relative* $\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(a \cdot \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(b \cdot \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$

2. Évaluation par une simulation numérique, méthode Monte-Carlo

Pour tous les autres cas, nous allons calculer l'incertitude-type à l'aide d'un algorithme informatique basé sur un processus aléatoire simulé informatiquement,.

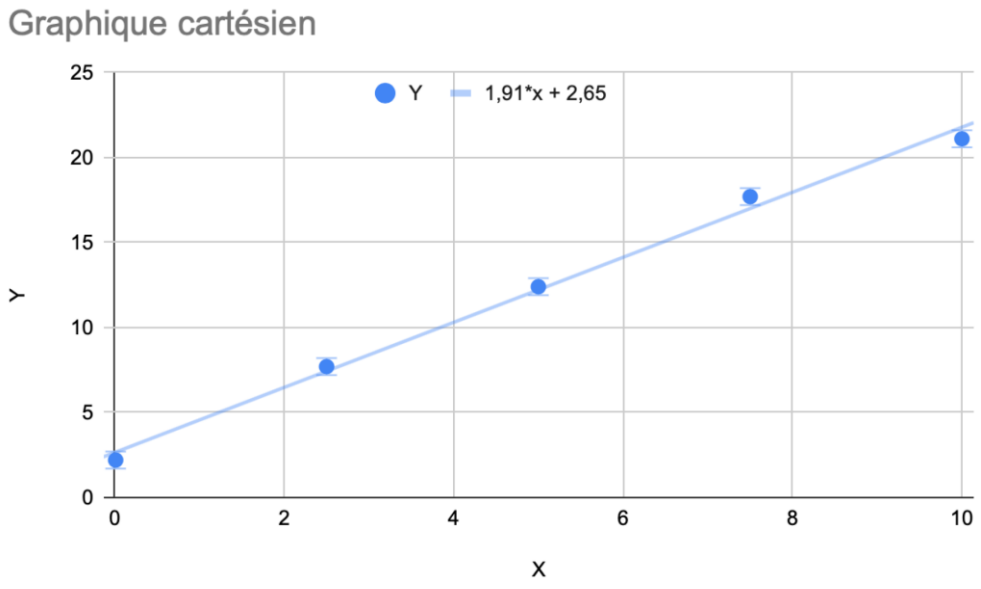
Principe : Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, ...)$ avec f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisée par sa valeur et son incertitude-type. La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer son incertitude-type $u(y)$, il faut remonter à la variabilité de y, qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i . Pour cela, il faut :

- Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
- Pour k variant entre 1 et N, réaliser un tirage aléatoire pour chaque x_i, utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
- Calculer la moyenne de la distribution des y_k obtenue , correspondant à la valeur de y ;
- Calculer l'écart-type de la distribution des y_k, correspondant à l'incertitude-type $u(y)$.

IV. Régression linéaire

Pour une liste de N mesures $\{x_i, y_i\}$, la régression linéaire $y = a \cdot x + b$ consiste à trouver les meilleurs cœfficients a et b tels que $a \cdot x_i + b$ soient les plus proches, en moyenne, des y_i. Elle permet de trouver la *meilleure droite* modélisant *au mieux* le comportement de ces points. Mathématiquement, on optimise ce calcul par la méthodes des moindres carrés : il s'agit de minimiser la fonction $\sum_i \left(y_i - (a \cdot x_i + b)\right)^2$

Bien souvent, on se trouvera dans la situation où l'incertitude-type des données représentées en abscisse est négligeable.



Remarque : En toute rigueur, il faudrait parler de *régression affine* et non pas *linéaire*.

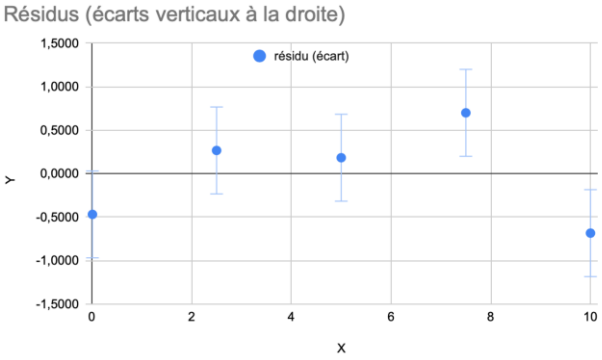
1. Validation des résultats par analyse des écarts normalisés

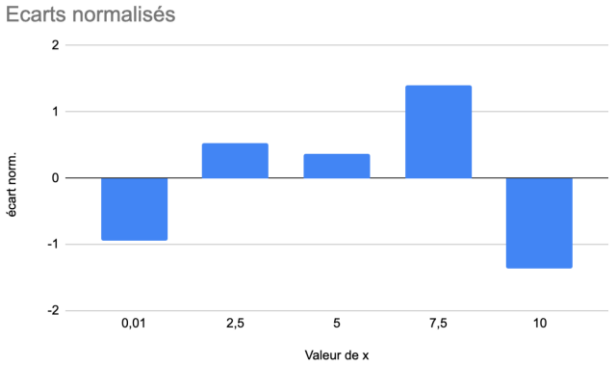
Le **coefficient de corrélation** r^2 n'a aucun intérêt pour valider un modèle physique ou pour estimer des incertitudes-type.

En première approche, le modèle sera validé si, *à l'œil*, les points de mesure sont bien alignés et que la droite passe au plus près des points, en incluant leurs incertitudes-type $u(y_i)$.

Pour une validation plus quantitative, on pourra :

- **tracer les résidus** $y_i - (a \cdot x_i + b)$ en fonction des x_i , en faisant apparaître les barres d'incertitude $u(y_i)$; les segments obtenus devant intercepter la valeur 0 (ce qui traduit le fait que la droite passe par les barres d'incertitudes)
- ou bien **tracer les écarts normalisés** $z = \dfrac{y_i - (a \cdot x_i + b)}{u(y_i)}$ en fonction des x_i , les écarts normalisés (ou z-score) devant tous être compris entre -2 et +2.





On voit dans cet exemple que le modèle affine est adapté.

2. Évaluation des incertitudes sur les paramètres du modèle par simulation Monte-Carlo

La régression linéaire simple permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver une valeur de a et une valeur de b .

Pour estimer l'incertitude-type de ces paramètres, il faudrait renouveller l'expérience plusieurs fois afin d' obtenir une série de valeurs $\{a_k, b_k\}$. Le calcul des écarts-types permet d'obtenir les incertitudes-types sur a et b . Un tel procédé serait bien trop long à mettre en œuvre. En revanche, on peut estimer la variabilité de a et b par une simulation Monte-Carlo.

Principe : Il faut estimer, pour chaque point de mesure, la valeur de l' incertitude-type $u(y_i)$. Ensuite, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, on utilise cette variabilité individuelle pour générer un grand nombre de distributions de points $\{x_i, y_i\}$. Pour chacune de ces distributions, on réalise une régression linéaire ce qui conduira au final à un grand nombre de valeurs de a et de b . On réalise ensuite une étude statistique de ces données pour en déduire les incertitudes-type $u(a)$ et $u(b)$.

Pour s'entraîner

Exercice 1 : Écriture du résultat d'une mesure

Compléter le tableau suivant en écrivant les résultats sous la forme $x \pm u(x) = \ldots$ en respectant les règles d'écriture, avec 2 chiffres significatifs maximum pour l'incertitude-type.

Grandeur	Valeur mesurée	Incertitude-type	Résultat
Distance	742310,1 m	777,32 m	
Distance	8231,34 m	3,449 m	
Distance	9,42136 mm	4 µm	
Temps	0,014280 s	0,000312 s	
Temps	0,0028534 s	0,000451 s	
Temps	0,000284 s	0,000436 s	
Résistance	1,10876 mΩ	333 µΩ	
Résistance	4,2032 MΩ	5,3 kΩ	
Intensité	45 A	0,32 kA	
Intensité	45 µA	4,4 mA	

Exercice 2 : Compatibilité d'une mesure avec une valeur de référence

Un élève mesure plusieurs fois le rapport entre la circonférence mesurée d'un cercle et son diamètre. Dans son rapport, il indique une valeur mesurée de 3,3 rad et une incertitude-type de 0,1 rad. Est-ce que ce résultat est compatible avec la valeur connue de π ?

Exercice 3 : Mesure de la distance focale d'une lentille

Lors d'une expérience visant à mesurer la distance focale d'une lentille mince convergente par auto-collimation, on a effectué 7 observations, en cm :

9,9	10,1	9,7	9,9	10,0	10,2	9,9

1. Évaluer tout d'abord l'incertitude-type associée à une unique observation, pour quantifier la variabilité inhérente au processus d'observation.
2. Pour mesurer au mieux la distance focale, on calcule la valeur mesurée à l'aide d'une moyenne. On profite ainsi de la compensation des fluctuations des observations. Quelle est l'incertitude-type sur la distance focale ainsi déterminée ?

Exercice 4 : Mesure d'une longueur

On mesure 10,0 cm avec une règle graduée au mm. On est certain que la longueur mesurée est comprise entre 9,95 et 10,05 cm. Comment écrit-on le résultat ?

Exercice 5 : Mesure d'une période d'oscillation

On souhaite mesurer la période T d'un pendule. Pour cela, on dispose d'un chronomètre résolvant le millième de seconde, qu'on déclenche et qu'on arrête à la main. On fait l'hypothèse raisonnable que ce processus induit une variabilité typique de 50 ms. On envisage deux protocoles de mesure :

A. On mesure 16 fois à l'aide du chronomètre le temps d'un aller-retour. À l'aide de ce 16 valeurs, on déduit une première évaluation de la période T_a . Comment obtient-t-on T_a ? Quelle est son incertitude-type associée $u(T_a)$?

B. On mesure une unique fois la durée D de 16 allers-retours successifs. Comment obtient-t-on T_b ? Quelle est son incertitude-type associée $u(T_b)$? Quel protocole est-il préférable de choisir ?

Exercice 6 : Mesurer avec un voltmètre numérique

Pour connaître l'incertitude-type associée à la mesure d'une tension à l'aide d'un multimètre, il faut consulter la notice du constructeur. On y trouve le plus souvent une précision qui n'est pas l'incertitude-type. Conventionnellement, on considère que cette précision est en réalité la demi-étendue a de l'intervalle $[m-a, m+a]$ qui représente le résultat de la mesure. La précision dépend du calibre choisi, elle correspond à un pourcentage de la valeur affichée auquel on ajoute un multiple de la résolution de l'appareil dans le calibre choisi (= unité du dernier chiffre affiché ou unité de lecture, ou encore digit)

Plage VC130/150	Précision	Résolution
200 mV	±(0,5% + 8)	0,1 mV
2000 mV		1 mV
20 V		0,01 V
200 V		0,1 V
250 V	±(0,8% + 8)	1 V

Extrait de la notice du multimètre Voltcraft VC 130.

En exploitant la notice ci-dessus :

- Indiquer quelle est la précision lorsque l'appareil affiche 10,00 V dans le calibre 20 V.
- En déduire la valeur de l'incertitude-type associée.
- Expliquer pourquoi il est préférable de choisir le calibre 20 V plutôt que le calibre 200 V.

Exercice 7 : Mesurer avec un voltmètre analogique

Sur la plupart des appareils analogiques apparaît un chiffre C appelé *classe,* indiquant la précision de la mesure égale à C % du calibre utilisé.
On mesure une tension de 10 V avec un voltmètre analogique de classe 1,5. Que penser de ce résultat si le calibre de 450 V a été utilisé ? Et dans le cas d'un calibre de 15 V ?

Exercice 8 : Position d'un viseur

On relève la position x d'un viseur sur un banc optique. Le banc est gradué au millimètre, et lors du pointé optique, on constate que l'image observée à travers le viseur reste nette sur un intervalle de largeur 4 mm.
Donner l'incertitude-type de position x du viseur.

Exercice 9 : Mesure d'une puissance

On cherche à déterminer la puissance dissipée par effet Joule dans un résistor de résistance R, traversé par un courant d'intensité I. Grâce à un ampèremètre et un ohmmètre, on obtient les résultats suivants :

$$R = 15,7\ \Omega\ ;\ u(R) = 0,1\ \Omega \quad \text{et} \quad I = 0,274\ \text{A}\ ;\ u(I) = 0,002\ \text{A}$$

Quel résultat obtient-on pour la puissance $P = R \cdot I^2$?

Exercice 10 : Mesure de la masse volumique de l'eau liquide

Pour mesurer expérimentalement la masse volumique de l'eau, on réalise 9 fois de suite le protocole suivant :

- On prélève 100 mL d'eau distillée dans une fiole jaugée dont l'intervalle de tolérance est de $\pm 0,1$ mL ;
- On mesure la masse correspondante de l'eau ainsi prélevée, la résolution de la balance étant de $0,01$ g .
- On calcule la moyenne des masses 99,4856 g et l'écart-type 0,5824 g.

1. Déterminer la masse volumique de l'eau et son incertitude-type.

2. La valeur obtenue est-elle compatible avec la valeur de référence de $1,00\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$?

Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.

Outils numériques	Capacités exigibles
Variable aléatoire	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction hist de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.

1. Écart-type d'une moyenne

On cherche à réaliser une simulation numérique pour vérifier que l'incertitude-type sur la moyenne $\overline{x}$ calculée à partir de N observations de la grandeur x, est approximativement égal à :

$$u(\overline{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \text{ où } s_x \text{ est l'écart-type associée aux } N \text{ observations.}$$

Pour cette simulation, nous prendrons $N = 16$ et nous supposerons que les observations sont aléatoirement et uniformément distribuées entre les valeurs 10 et 11. La commande numpy.random.uniforme(a,b,N) renvoie un array numpy de N nombres aléatoires uniformément distribués entre a et b.

Si les observations se trouvent dans un array numpy `data`, la commande `numpy.average(data)` calcule la **moyenne** des observations ; `numpy.mean(data)` fait la même chose. La commande `numpy.std(data, ddof = 1)` permet de calculer l'**écart-type** des observations. Il est nécessaire de bien préciser `ddof = 1` pour s'assurer que le calcul utilise bien le dénominateur $N-1$.

- **a)** Calculer l'écart-type s_x associée aux $N = 16$ observations.
- **b)** Calculer 10000 moyennes de 16 observations, et calculer l'écart-type sur ces 10000 valeurs correspondant à l'incertitude-type $u(\overline{x})$.
- **c)** Vérifier numériquement que $u(\overline{x}) / s_x = 1/\sqrt{16} = 1/4$.

2. Incertitude-type associée à un histogramme rectangulaire

Pour des observations uniformément réparties dans un intervalle $[m-a, m+a]$ et associées à un histogramme rectangulaire , on montre que l'incertitude-type est égal à :

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

On cherche à vérifier cette équation numériquement.

- **a)** Produire 10000 observations réparties uniformément entre 2 et 4
- **b)** Calculer l'écart-type de ces observations et vérifier la relation $u(x) = a/\sqrt{3}$ (avec $a = 1$ ici).
- **c)** Représenter l'histogramme associé aux 10000 observations. On utilisera la fonction `plt.hist(data)`. On peut utiliser les options supplémentaires suivantes dans l'argument de `plt.hist` :
  - `bins = 'rice'` qui impose un nombre de classes adapté, en suivant la règle de Rice ; on peut imposer un nombre donné de classes en écrivant par exemple `bins = 20`.
  - `range = [valmin,valmax]` qui permet d'ajuster les bornes d'affichage de l'axe des abscisses.
  - `histtype = 'step'` qui ne trace que le contour de l'histogramme, ce qui permet d'en superposer plusieurs de manière lisible.

3. Exemples de simulation Monte-Carlo pour calculer une incertitude composée

a) <u>Incertitude composée d'une fréquence connaissant la période</u>

On mesure une période $T = 24,4\ \mu s$ avec une précision estimée à $\Delta T = 0,1\ \mu s$. Calculer l'incertitude-type de la fréquence $f = 1/T$.

b) <u>Incertitude composée de type somme ou différence</u>

On mesure la distance $\ell = x_1 - x_2$ entre deux points ; leurs positions $x_1 = 19,5\ cm$ et $x_2 = 11,1\ cm$ étant déterminée avec une précision $\Delta x = 0,5\ cm$. Calculer l'incertitude-type $u(\ell)$.

c) <u>Incertitude composée de type produit</u>

Calculer la célérité du son $c = \lambda \cdot f$ et son incertitude-type $u(c)$ avec une fréquence $f = 40983\ Hz$, $(u(f) = 94\ Hz)$ et une longueur d'onde $\lambda = 0,840\ cm,\ (u(\lambda) = 0,041\ cm)$. *Attention, cette fois c'est directement l'incertitude-type qui est donnée. Si on suppose que la distribution de probabilité est uniforme, il faut remonter à la précision à l'aide du facteur* $\sqrt{3}$.

d) <u>Incertitude composée d'une fonction plus complexe : exemple 1</u>

Calculer la célérité du son $c = (x_1 - x_2)/(10 \cdot T)$ et son incertitude-type $u(c)$ à partir de l'écart $\ell = x_1 - x_2$ entre deux nœuds séparant 10 longueurs d'ondes et la période T . On reprend les valeurs et précisions des exemples a) et b).

e) <u>Incertitude composée d'une fonction plus complexe : exemple 2</u>

Calculer la distance focale d'une lentille $f' = 1/\left(1/\overline{OA'} - 1/\overline{OA}\right)$ avec la position de l'objet $x_A = 1,5\ cm$ (précision de la mesure $\Delta x_A = 0,5\ cm$), la position de l'image $x_{A'} = 46,5\ cm$ $(\Delta x_{A'} = 1\ cm)$ et celle de la lentille $x_O = 16,5\ cm$ $(\Delta x_O = 3\ cm)$.

Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

Outils numériques	Capacités exigibles
Variable aléatoire	Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou **numpy** (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la moyenne et l'écart-type d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction hist de la bibliothèque **matplotlib.pyplot** (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire.
Régression linéaire	Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque **numpy** (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.
Représentation graphique d'une fonction	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction.

Supposons que nous ayons réalisé m mesures de couples (x_i, y_i), chacun avec une incertitude-type $(u(x_i), u(y_i))$.
On se place dans le cas de figure où les incertitudes-type $u(x_i)$ sont négligeables.

x	0,01	2,50	5,00	7,50	10,00
y	2,20	7,70	12,40	17,70	21,10
$u(y)$	0,5	0,4	0,4	0,6	0,8

a) Réaliser la régression linéaire $y = f(x)$ et donner la valeur des paramètres a et b.

On cherche à déterminer les incertitudes sur les paramètres a et b en effectuant un grand nombre de régressions linéaires (méthode Monte-Carlo) .

Voici les étapes d'une simulation Monte-Carlo :

- ✓ Réaliser une régression linéaire unique pour estimer la pente et l'ordonnée à l'origine.
- ✓ Fixer un nombre N très grand ($N = 1000$)
- ✓ Créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions successives.
- ✓ pour chaque i compris entre 1 et N , réaliser :
  - Pour chaque j compris entre 1 et m (ici $m = 5$), réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de y_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $[y_j - \sqrt{3} \cdot u(y_j), y_j + \sqrt{3} \cdot u(y_j)]$
  - Le cas échéant, pour chaque j, réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de x_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $[x_j - \sqrt{3} \cdot u(x_j), x_j + \sqrt{3} \cdot u(x_j)]$
  - Réaliser une régression linéaire sur cet ensemble (x_j, y_j) puis ajouter dans les listes la pente a et l'ordonnée à l'origine b de cette régression.
- ✓ Calculer les écarts-types de ces deux listes pour obtenir les incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$.
- ✓ Superposer sur le même graphique, la droite $y = ax + b$ et les points expérimentaux avec leurs incertitudes-type sous la forme de barre d'erreur.

b) Mettre en œuvre la méthode décrite ci-dessus pour déterminer $u(a)$ et $u(b)$.

c) Représenter les résidus $y_i - (a \cdot x_i + b)$ ainsi que les écarts normalisés $z = \dfrac{y_i - (a \cdot x_i + b)}{u(y_i)}$ en fonction des x_i. Conclure sur la validité du modèle linéaire.

d) Effectuer une régression linéaire avec le logiciel REGRESSI, en cochant dans les options, la méthode du χ_2

Cette méthode de régression linéaire consiste à minimiser la quantité $\sum_i \left(\dfrac{y_i - (a \cdot x_i + b)}{u(y_i)} \right)^2$. Elle est plus précise que la méthode des moindres carrés car chacun des points est pondéré par son incertitude-type et les points de faible incertitude-type ont plus de poids que les points de forte incertitude-type.
Les valeurs obtenues pour a et b, $u(a)$ et $u(b)$ sont-elles cohérentes ?