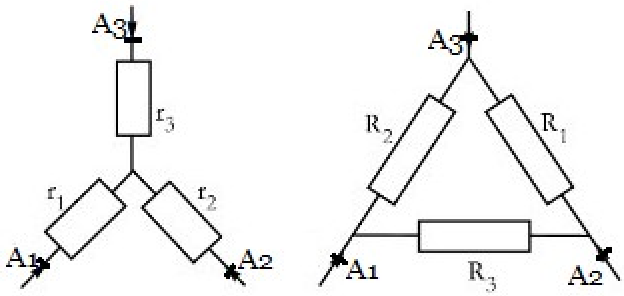
DM4- Théorème de Kennelly et applications

1.Triangle vers étoile



On n'utilise pas les courants, c'est inutile : déconnectons le point A_1 : dans l'étoile, la résistance équivalente est r_2+r_3, puisqu'elles se retrouvent en série, et elle doit être la même dans le triangle pour que les deux circuits soient équivalents, soit $R_1//(R_2+R_3)$.

On calcule cette dernière : $\dfrac{1}{R_1//(R_2+R_3)}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2+R_3}=\dfrac{\sum_1^3 R_k}{R_1(R_2+R_3)}$.

On introduit temporairement $S=\sum_1^3 R_k$ pour alléger l'écriture.

On en déduit $r_2+r_3=\dfrac{R_1(R_2+R_3)}{S}$ (1).

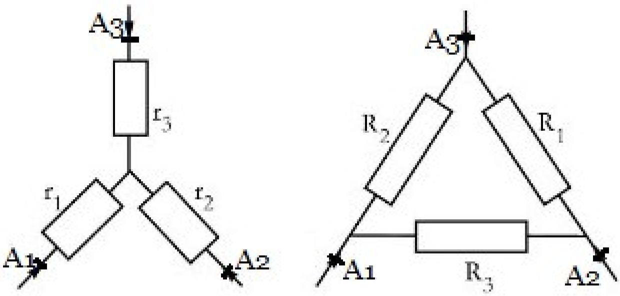
Et bien sûr, en procédant de même, ou bien, puisque les résistances jouent un rôle identique, en procédant à une <u>permutation circulaire</u> des indices.

$1\to2\to3\to1$: $r_3+r_1=\dfrac{R_2(R_3+R_1)}{S}$ (2) et $r_1+r_2=\dfrac{R_3(R_1+R_2)}{S}$ (3).

On cherche d'abord r_1 : on voit qu'on élimine les autres résistances en calculant $(2)+(3)-(1)$: $2r_1=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3+R_2R_3-R_1R_2-R_1R_3}{S}$ soit

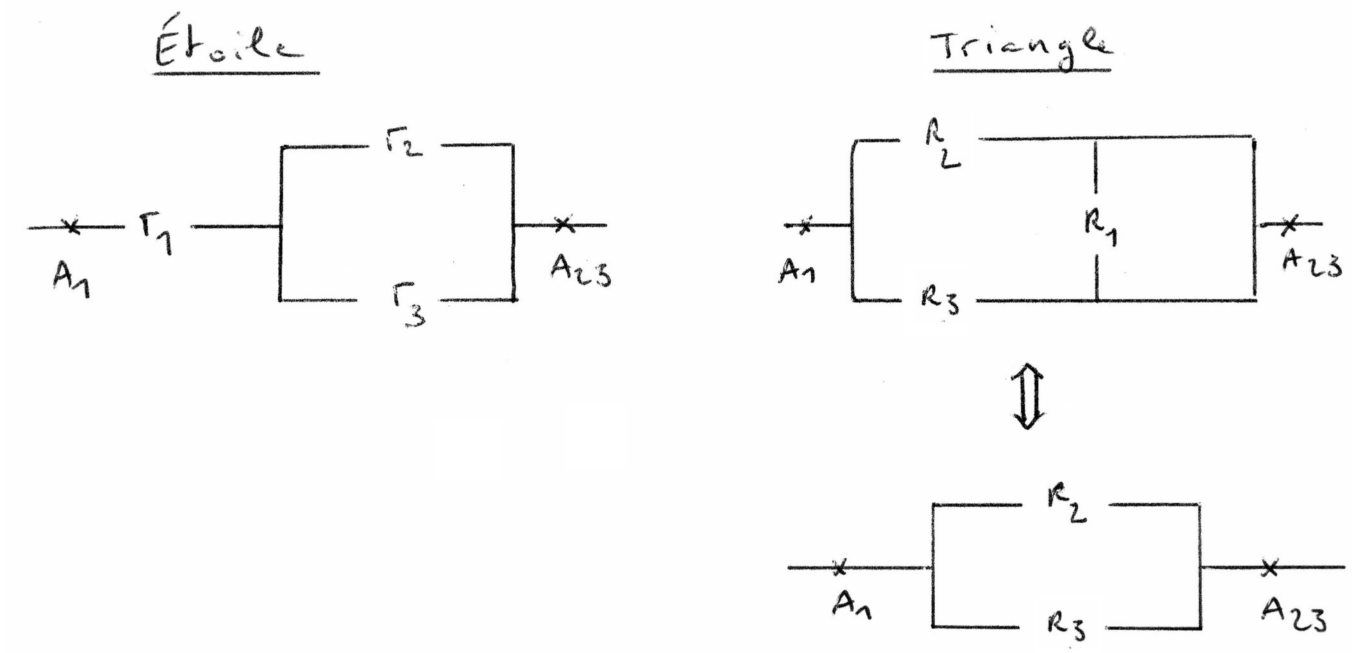
$r_1=\dfrac{R_2R_3}{S}$: $\boxed{r_1=\dfrac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$, et de même : $\boxed{r_2=\dfrac{R_3R_1}{R_1+R_2+R_3}}$ et $\boxed{r_3=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}}$

2. Étoile vers triangle



Inverser le système précédent est très délicat ! On reprend l'étude des circuits avec l'astuce donnée…

Relions ensemble A_2 et A_3 :



Dans le triangle en effet, R_1 est en dérivation avec un fil idéal (! définition de la dérivation – on peut déplacer le point A_{23} en bas du schéma pour être convaincu) et ne sert donc plus à rien car $(R_k // fil) = fil$.

Calculons comme recommandé les conductances dans chacun des cas : dans le triangle, on a $G = G_2 + G_3$.

Dans l'étoile, on a, avec des notations évidentes $g_{23} = g_2 + g_3$, qui est en série avec g_1, donc il faut sommer les inverses : $\frac{1}{g} = \frac{1}{g_2 + g_3} + \frac{1}{g_1}$.

On en déduit que $G_2 + G_3 = \frac{g_1(g_2 + g_3)}{g_1 + g_2 + g_3}$ et même chose en permutant les indices.

On remarque que les équations sont exactement les mêmes qu'à la question 1, en remplaçant les r_k par les G_k, et les R_k par les g_k.

Sans calcul supplémentaire, on trouve donc : $G_1=\dfrac{g_2 g_3}{g_1+g_2+g_3}$, et permutations.

On peut tenter une simplification : $R_1=\dfrac{\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}}{\dfrac{1}{r_2}\dfrac{1}{r_3}}=r_2 r_3\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)$.

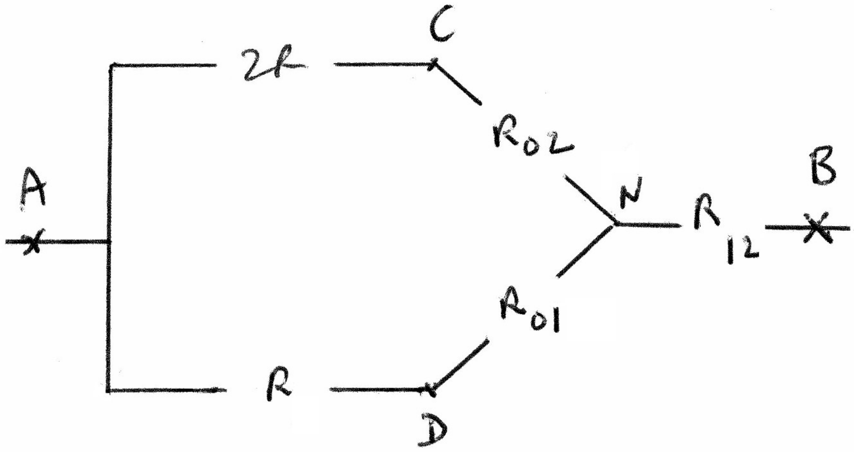
C'est bien le cas : on trouve $\boxed{R_1=r_2+r_3+\dfrac{r_2 r_3}{r_1}}$ et bien sûr $\boxed{R_2=r_3+r_1+\dfrac{r_3 r_1}{r_2}}$, et $\boxed{R_3=r_1+r_2+\dfrac{r_1 r_2}{r_3}}$.

3. Explosion du pont

Il faut utiliser d'abord le théorème de Kennelly, car il n'existe aucune association série ou dérivation.

On peut notamment transformer le triangle à droite en étoile,

où l'indice « 0 » indique une fusion avec la résistance R, sans indice.



Le passage de triangle vers étoile se traduit par le produit des résistances initialement reliées au point considéré, sur la somme :

$$R_{02}=\frac{R^2}{R+R+2R}=\frac{1}{4}R\ ,\quad R_{01}=R_{12}=\frac{2R^2}{4R}=\frac{1}{2}R\ .$$

Avec des notations évidentes encore, on calcule :

- en haut $R_{ACN}=2R+R_{02}=\dfrac{9}{4}R$

- en bas $R_{ADN}=R+\dfrac{1}{2}R=\dfrac{3}{2}R$

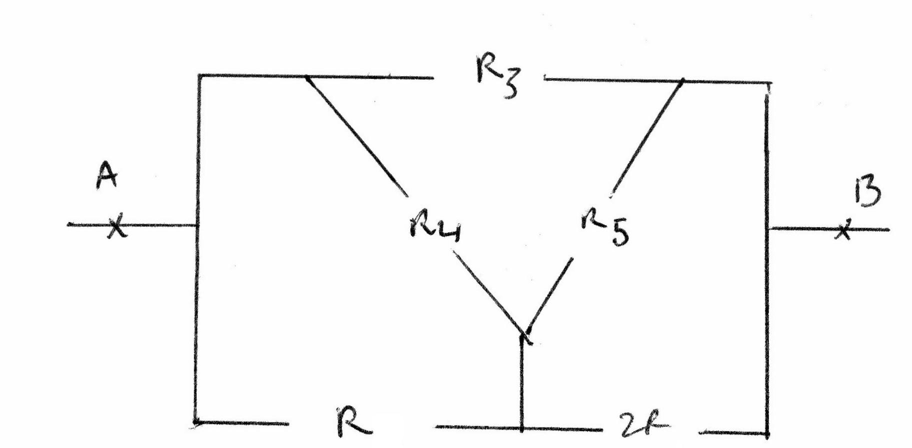
Elles sont dérivation : $\dfrac{1}{R_{AN}}=\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{10}{9R}$.

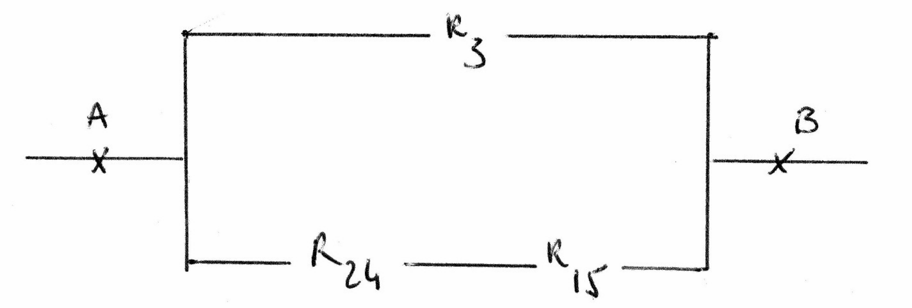
Elle est en série avec R_{12}, donc $R_{éq}=\dfrac{9}{10}R+\dfrac{1}{2}R=\dfrac{14}{10}R$ soit $\boxed{R_{éq}=\dfrac{7}{5}R}$.

Alternatives

a. Ça marche mais dérivations difficiles à repérer

On peut tout aussi bien utiliser l'autre version du théorème de Kennelly : étoile vers triangle, sur l'étoile en haut.





Il faut alors voir que R et R_4 sont effectivement en dérivation, et de même, c'est le cas pour $2R$ et R_5.

Pour le passage de étoile vers triangle, on fait comme si les résistances entre les 2 points considérés étaient en série, mais avec leur produit sur la résistance restante (en face) à ajouter comme terme correctif :

$$R_3=R_4=2R+R+\frac{2R^2}{R}=5R\ ,\ \ R_5=R+R+\frac{R^2}{2R}=\frac{5}{2}R$$

On calcule $G_{24}=\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{5R}=\dfrac{6}{5R}$ et donc $R_{24}=\dfrac{5}{6}R$.

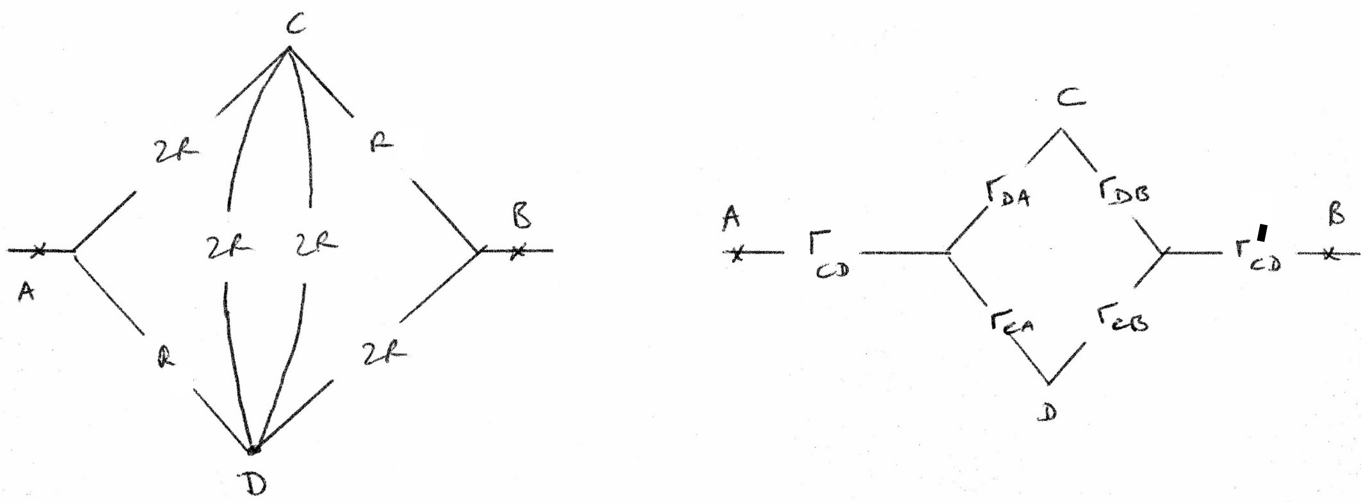
$$G_{15}=\frac{1}{2R}+\frac{2}{5R}=\frac{9}{10R}\ :\ R_{15}=\frac{10}{9}R$$

Leur fusion série est donc $R_{BAS}=\frac{10}{9}R+\frac{5}{6}R=\frac{35}{18}R$, et finalement

$\frac{1}{R_{éq}}=\frac{1}{R}\left(\frac{18}{35}+\frac{1}{5}\right)=\frac{25}{35R}$ donc encore $R_{éq}=\frac{35}{25}R=\frac{7}{5}R$: un peu laborieux...

<u>b. Très astucieuse...</u>

Remplacer la résistance centrale verticale par 2 fois 2R en dérivation, et appliquer Kennelly 2 fois de triangle vers étoile.



On trouve $r_{CD}=\frac{2R^2}{5R}=\frac{2}{5}R=r'_{CD}=r_{DB}=r_{CA}$, puis $r_{DA}=r_{CB}=\frac{4R^2}{5R}=\frac{4}{5}R$.

On en déduit ensuite que $r_{DA}+r_{DB}=r_{CA}+r_{CB}=\frac{6}{5}R$, identiques et en dérivation entre elles : leur fusion donne la résistance moitié, et la série avec $r_{CD}=r'_{CD}$ donne le résultat voulu : $R_{éq}=2\times\frac{2}{5}R+\frac{3}{5}R$ soit $\boxed{R_{éq}=\frac{7}{5}R}$.

<u>Moralité</u> : très souvent, dans un problème, conserver la symétrie initiale lors de la résolution aboutit à des calculs plus simples...

le circuit initial comportait 2 triangles : on a intérêt à les traiter de la même façon et donc à le transformer en 2 étoiles... mais il faut trouver l'astuce !