TD 5 TRANSITOIRES (1)

1. Source de tension idéale et bobine réelle

On alimente la bobine à partir de la date $t=0$ avec une source de tension idéale et constante E.

a) $E=u_L \Leftrightarrow E=ri+L\dfrac{di}{dt}$ soit $\tau\dfrac{di}{dt}+i=\dfrac{E}{r}$ avec $\tau=\dfrac{L}{r}$

La SP (on raye la dérivée) est $i_P=\dfrac{E}{r}$ et la SGH est $i_H(t)=A\,e^{-t/\tau}$; le th. de structure donne $i(t)=A\,e^{-t/\tau}+\dfrac{E}{r}$ où il faut déterminer la constante d'intégration *A*.

Dans une bobine, l'intensité est toujours continue : $i(0^+)=i(0^-)$; or elle était nulle auparavant (interrupteur ouvert), donc $i(0^+)=0$.

En remplaçant $i(0)=0=A+\dfrac{E}{r}$ donc $A=-\dfrac{E}{r}$ et $i(t)=\dfrac{E}{r}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$: exponentielle décroissante inversée qui part de 0 et tend vers $i_P=\dfrac{E}{r}$.

b) On résout donc $i(t)=\dfrac{E}{r}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\dfrac{E}{2r}$: $t=\tau\ln 2$

c) L'énergie stockée dans la bobine à l'état final est donc $E_L=\dfrac{1}{2}L\,i_P^2=\dfrac{LE^2}{2r^2}$.

La puissance fournie par la source est $P_E=E.i=\dfrac{E^2}{r}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$, sa limite est $P_{E\infty}=\dfrac{E^2}{r}$, constante positive : l'énergie fournie augmente donc linéairement avec le temps.

En régime permanent, l'énergie stockée dans la bobine est constante, et toute l'énergie fournie par la source se dissipe par effet Joule dans la résistance.

2. Circuit RC parallèle

On considère une source de courant idéale I_0 alimentant, à partir de la date nulle, un condensateur *C* initialement déchargé et une résistance *R*.

Les trois dipôles sont en dérivation. On s'intéresse à l'évolution de la tension *u* aux bornes du condensateur.

(a) On introduit évidemment i_R et i_C qui vérifient la loi des nœuds : $I_0=i_R+i_C$; de plus, pas de loi des mailles mais **une seule tension** *u* car dipôles en dérivation, tension qui vérifie les lois des dipôles $u=Ri_R$ et $i_C=C\dfrac{du}{dt}$

(b) On raye toutes les dérivées temporelles, ce qui donne immédiatement $i_C=0$, puis $i_R=I_0$ et $u=RI_0$

(c) On combine en se débarrassant des variables indésirables ; c'est immédiat ici : $I_0=\dfrac{u}{R}+C\dfrac{du}{dt}$, donc sous forme canonique $\tau\dfrac{du}{dt}+u=RI_0$ avec $\tau=RC$

Comme *u* est notamment la tension aux bornes du condensateur, elle est continue en 0 : $u(0^+)=u(0^-)$.

Celui-ci étant initialement déchargé, on a $u(0^-)=\dfrac{1}{C}q(0^-)=0$.

La résolution usuelle (cf cours et exercice précédent) donne $u(t)=RI_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$.

3. Circuit avec bobine

(a) Appliquons les lois de Kirchhoff : $\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ E = R_g i_1 + L\dfrac{d i_2}{dt} \\ E = R_g i_1 + R\, i_3 \end{cases}$ ce qui devient en éliminant i_3 :

$\begin{cases} E = R_g i_1 + L\dfrac{d i_2}{dt} \\ E = (R_g + R) i_1 - R\, i_2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \dfrac{E}{R_g} = i_1 + \dfrac{L}{R_g}\dfrac{d i_2}{dt} \\ \dfrac{E}{R_g + R} = i_1 - \dfrac{R}{R_g + R} i_2 \end{cases}$ pour éliminer i_1 .

On soustrait $\dfrac{L}{R_g}\dfrac{d i_2}{dt} + \dfrac{R}{R + R_g} i_2 = \left(\dfrac{1}{R_g} - \dfrac{1}{R + R_g}\right) E$

On peut l'écrire $\tau \dfrac{d i_2}{dt} + i_2 = I_0$ avec $\underline{\tau = \dfrac{L}{R_g}\dfrac{R + R_g}{R} = L\left(\dfrac{1}{R_g} + \dfrac{1}{R}\right)}$ et $\underline{I_0 = \left(\dfrac{R + R_g}{R R_g} - \dfrac{1}{R}\right) E = \dfrac{E}{R_g}}$

La solution de l'équation homogène est $i_{2H}(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ et une solution particulière est $i_{2P}(t) = I_0$: la solution générale de cette équation est donc $i_2(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + I_0$.

On sait que $i_2 = 0$ pour $t < 0$ et que i_2 est continue dans une bobine : $i_2(0^+) = 0$.

On remplace dans la solution générale les conditions aux limites $i_2(0) = \lambda + I_0 = 0$ donc $\lambda = -I_0$.

Finalement $\boxed{i_2(t) = I_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$

(b) On ne connaît ni i_3 , ni i_1 : il faut utiliser $\boxed{u = L\dfrac{d i_2}{dt} = \dfrac{L I_0}{\tau}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) = \dfrac{R}{R + R_g} E \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$.

(c) i_2 est croissante et tend vers la limite I_0 ; u est discontinue en 0, et décroît vers 0.
Remarque On peut retrouver les limites de u grâce au comportement de la bobine :
À $t = 0^+$, $i_2 = 0$: la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le circuit à un pont diviseur de tension.
Pour $t \to \infty$, $u = L\dfrac{d i_2}{dt} \to 0$ car toutes les dérivées sont nulles en régime permanent.

4. Chute verticale freinée

(a) Référentiel terrestre galiléen, donc $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$ (2ème loi de Newton), avec $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{P} = m\vec{g}$: en projetant sur l'axe vertical *z* vers le bas, on trouve $m\dfrac{dv}{dt} = m g - k v$, donc sous forme canonique

$\tau \dfrac{dv}{dt} + v = \tau g$, avec $\tau = \dfrac{m}{k}$

(b) C'est la solution particulière (dérivée temporelle nulle), donc $v_\infty = \tau g$

(c) La solution générale est donc $v(t) = \lambda \exp(-t/\tau) + v_\infty$, avec $v(0) = v_0$, donc $\lambda = v_0 - v_\infty$

(d) Fonction croissante si $v_0 < v_\infty$, décroissante dans le cas contraire, avec la tangente à l'origine qui coupe toujours à la même date τ.

5. Charge d'un condensateur et source de courant

(a) Les lois du condensateur sont $q=Cu$ et $i_C=\frac{dq}{dt}$. On suppose le régime permanent établi depuis longtemps : $i=i_C$ est alors nulle, comme toute dérivée temporelle, il en est donc de même pour la tension aux bornes de la résistance. On obtient donc par la loi des mailles $u(0^-)=E$ et donc $q(0^-)=CE$.

(b) Pour $t\to\infty$, $i_C\to 0$ (dérivée temporelle de q) : le circuit est devenu série et le courant y est imposé par la source de courant $i=-\eta$. On en déduit par la loi des mailles $u-R\eta=E$ soit $u=E+R\eta$.

(c) À $t=0^+$, la tension aux bornes du condensateur est forcément continue, et donc la charge q aussi : on a donc $u=E$, et le potentiel vaut donc E de chaque côté de la résistance : $i=0$. La loi des nœuds impose donc que $i_C=\eta$.

	i	i_C	u	q
$t=0^-$	0	0	E	CE
$t=0^+$	0	η	E	CE
$t\to+\infty$	$-\eta$	0	$E+R\eta$	$C(E+R\eta)$

(d) Lois

Dipôles : $u_R=Ri$, $i_C=C\frac{du}{dt}$, pas de lois pour les sources idéales.

Maille : $E=u+u_R$

Nœuds : $i_C=i+\eta$

(e) On élimine toutes les variables sauf u dans la loi des mailles par exemple :

$$E=u+R\left(C\frac{du}{dt}-\eta\right) .$$

C'est bien une équadiff d'ordre 1 qu'on peut (doit) écrire sous forme canonique :

$\tau\frac{du}{dt}+u=E'$ avec $E'=E+R\eta$ et $\tau=RC$.

(f) La solution générale est $u(t)=K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+E+R\eta$ avec $u(0)=E=K+E+R\eta$ donc $K=-R\eta$. D'où la tension obtenue $\boxed{u(t)=E+R\eta\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]}$.

On obtient une courbe de charge classique, sauf qu'elle démarre à E ; on vérifie (question (b)) que sa limite est $E+R\eta$.

6. Réponse d'un circuit (R,C) à un signal créneau

(a) On a très simplement : $e=u_R+u=Ri+u$ donc $RC\frac{du}{dt}+u=e(t)$, donc $\pm e_0$ à droite selon les domaines de temps. On pose $\tau=RC$.

(b) Dans ce cas, le créneau est très long : on atteint le régime permanent avant le saut suivant.

En régime établi, l'état avant bascule (saut) est donc u_∞ donc la SP de l'équadiff précédente. Comme *u* est continue à chaque saut, c'est la valeur initiale de la solution.

Pour simplifier d'abord, **en fixant la date nulle à chaque saut** :

si $e(t)=+e_0$: $\tau\frac{du}{dt}+u=+e_0$ avec $u(0^+)=-e_0$: $u(t)=Ae^{-t/\tau}+e_0$ donc $-e_0=A+e_0$ et $u(t)=e_0\left(1-2e^{-t/\tau}\right)$.

En translatant (cf théorème de maths) pour remettre la bonne origine des dates :

$$\boxed{u(t)=e_0\left[1-2\exp\left(-\frac{t-(n+1/2)T}{\tau}\right)\right]} \quad \text{pour} \quad \underline{(n+1/2)T<t<(n+1)T}$$

si $e(t)=-e_0$, $u(t)=Ae^{-t/\tau}-e_0$ avec $u(0^+)=+e_0$ donc $A=2e_0$: $u(t)=e_0\left(2e^{-t/\tau}-1\right)$.

Avec la translation, on a $\boxed{u(t)=e_0\left[2\exp\left(-\frac{t-nT}{\tau}-1\right)\right]}$ pour $\underline{nT<t<(n+1/2)T}$

(c) On n'a pas le temps d'atteindre le RP à chaque fois

Pour $nT<t<(n+1/2)T$, on a $u(t)=A_n e^{-t/\tau}-e_0$, alors que pour $(n+1/2)T<t<(n+1)T$, on a $u(t)=B_n e^{-t/\tau}+e_0$.

Il y a continuité de la fonction en $(n+1/2)T$:

$$A_n\exp\left(-\frac{(n+1/2)T}{\tau}\right)-e_0=B_n\exp\left(-\frac{(n+1/2)T}{\tau}\right)+e_0 \quad : \quad A_n-B_n=2\exp\left(\frac{(n+1/2)T}{\tau}\right)e_0$$

Il y a aussi continuité en $(n+1)T$:

$$B_n\exp\left(-\frac{(n+1)T}{\tau}\right)+e_0=A_{n+1}\exp\left(-\frac{(n+1)T}{\tau}\right)-e_0 \quad : \quad A_{n+1}-B_n=2\exp\left(\frac{(n+1)T}{\tau}\right)e_0$$

C'est périodique : on retrouve la même valeur en $(n+1)T$ qu'en nT :

$A_n\exp\left(-\frac{nT}{\tau}\right)-e_0=A_{n+1}\exp\left(-\frac{(n+1)T}{\tau}\right)-e_0$: $A_{n+1}=A_n\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)$, qu'on remplace dans la deuxième condition et on lui soustrait la première :

$$A_n\left[\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)-1\right]=2e_0\left[\exp\left(\frac{(n+1)T}{\tau}\right)-\exp\left(\frac{(n+1/2)T}{\tau}\right)\right] \quad \text{donc}$$

$$A_n=2e_0\exp\left(\frac{nT}{\tau}\right)\frac{\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)-\exp\left(\frac{T}{2\tau}\right)}{\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)-1} \quad \text{et} \quad B_n=A_n-2\exp\left(\frac{(n+1/2)T}{\tau}\right)e_0$$

(d) On doit ajouter la solution homogène de l'équadiff $u_H(t)=De^{-t/\tau}$ donc

$u(t) = D e^{-t/\tau} + A_0 e^{-t/\tau} - e_0$ qui vaut 0 en 0 : $D = e_0 - A_0$