1. On note $u(t)=U\cos(\omega t)$ avec $U=311{,}2\,\mathrm{V}$ et $\omega=314{,}2\,\mathrm{rad/s}$.

   On associe les impédances pour obtenir l'intensité globale (orientée vers la droite) :

   La fusion de la dérivation donne $\underline{Y}_{\mathrm{LR}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}$ donc $\underline{Z}_{\mathrm{LR}}=\frac{j\omega RL}{R+j\omega L}$.

   La fusion définitive donne $\underline{Z}_{\text{éq}}=\frac{j\omega RL}{R+j\omega L}+\frac{1}{j\omega C}=\frac{R(1-\omega^2LC)+j\omega L}{j\omega C(R+j\omega L)}$.

   Comme on ne connaît pas le signe de la partie réelle au numérateur, ce qui compliquerait les calculs d'arguments, on peut diviser par *j* en haut et en bas : $\underline{Z}_{\text{éq}}=\frac{\omega L+jR(\omega^2LC-1)}{\omega C(R+j\omega L)}$

   On a maintenant $\underline{I}=\underline{Y}_{\text{éq}}\underline{U}=\underline{Y}_{\text{éq}}U$ car $\varphi_u=0$. On en déduit $I=|\underline{Y}_{\text{éq}}|U=\frac{1}{|\underline{Z}_{\text{éq}}|}U$ et $\varphi_i=\operatorname{Arg}\underline{Y}_{\text{éq}}+0=-\operatorname{Arg}\underline{Z}_{\text{éq}}$.

   <u>Application numérique</u> : $\underline{Z}_{\text{éq}}=\frac{377+108j}{0{,}0314(100+377j)}\ \Omega$, donc

   $Z_{\text{éq}}=\frac{\sqrt{377^2+108^2}}{0{,}0314\sqrt{100^2+377^2}}\ \Omega=93{,}7\,\Omega$, soit $I=\frac{220\sqrt{2}}{93{,}7}=3{,}32\,\mathrm{A}$

   $\operatorname{Arg}\underline{Z}_{\text{éq}}=\operatorname{Arctan}\frac{108}{377}-\operatorname{Arctan}\frac{377}{100}=-0{,}0753\,\mathrm{rad}=-4{,}315\,°$: $\varphi_i=4{,}315\,°$.

   On a déterminé $i(t)=I\cos(\omega t+\varphi_i)$.

   D'après la loi du condensateur, on a $u_C(t)=U_C\cos(\omega t+\varphi_{uC})=\frac{I}{\omega C}\cos\left(\omega t+\varphi_i-\frac{\pi}{2}\right)$:

   $U_C=105{,}7\,\mathrm{V}$ et $\varphi_{uC}=-85{,}69\,°$.

   En notant $v(t)=V\cos(\omega t+\varphi_v)$ la tension aux bornes des dipôles R,L en dérivation, le plus simple est d'utiliser à nouveau la loi d'Ohm : $\underline{V}=\underline{Z}_{\mathrm{LR}}\underline{I}$ donc $V=|\underline{Z}_{\mathrm{LR}}|I$ et $\varphi_v=\operatorname{Arg}\underline{Z}_{\mathrm{LR}}+\varphi_i$.

   <u>Application numérique</u> : $\underline{Z}_{\mathrm{LR}}=\frac{37700j}{100+377j}$ donc $Z_{\mathrm{LR}}=\left|\frac{37700j}{100+377j}\right|=96{,}67\,\Omega$ et

   $\operatorname{Arg}\underline{Z}_{\mathrm{LR}}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{377}{100}=0{,}260\,\mathrm{rad}=14{,}86\,°$: $V=321{,}0\,\mathrm{V}$ et $\varphi_v=19{,}17\,°$.

   On remarque que $V>U$.

   Remarque : c'est une très mauvaise idée d'utiliser $\underline{V}=\underline{E}-\underline{U}_C$, l'addition (ou la soustraction) étant délicate sous forme exponentielle…

   On trouve les courants avec les admittances : $\underline{I}_R=\underline{Y}_R\underline{V}$ donc même phase que $v(t)$ et amplitude $I_R=\frac{V}{R}=3{,}210\,\mathrm{A}$, et $\underline{I}_L=\underline{Y}_L\underline{V}$ donc $I_L=\frac{V}{\omega L}=0{,}851\,\mathrm{A}$ et

   $\varphi_{iL}=-\frac{\pi}{2}+\varphi_v=-70{,}83\,°$.

2. L'approche est différente : on construira le vecteur $\vec{U}$ à la fin comme somme des autres vecteurs de Fresnel des tensions, grâce à la loi des mailles $\vec{U}=\vec{U}_C+\vec{V}$.

   C'est le seul vecteur dont on connaît les propriétés (norme, argument).

   On commence par l'association en dérivation : la tension $v(t)$ est commune, on la prend comme référence temporaire (vecteur $\vec{V}$ horizontal).

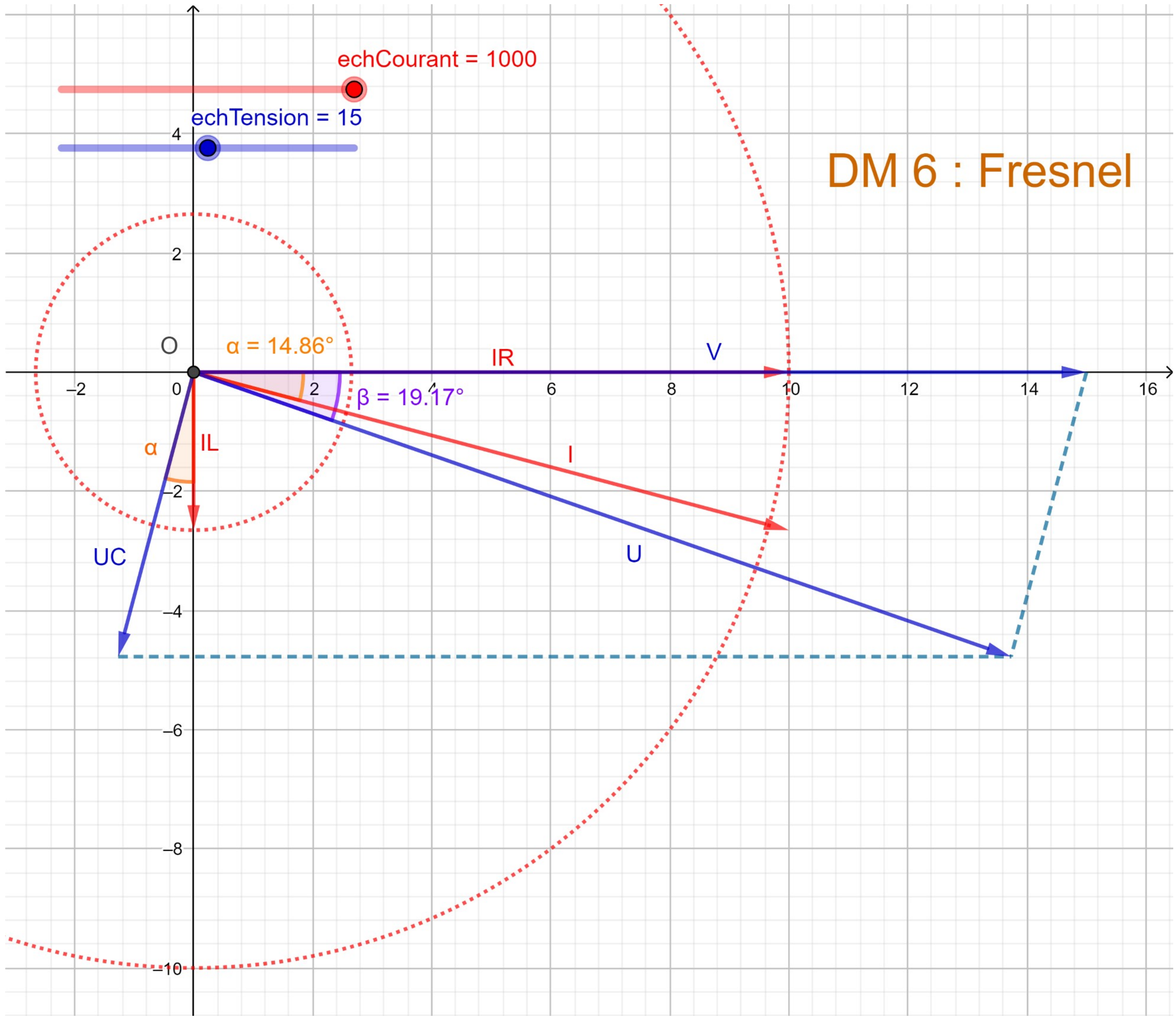
   Les intensités s'ajoutent : on a $i_R(t)=Gv(t)$, *G* étant réelle, le vecteur $\vec{I}_R$ est horizontal et de norme $I_R=\frac{V}{R}$.

   On ne connaît pas encore la norme de *V* : on prend une échelle arbitraire pour les intensités, par exemple 10 cm pour I_R .

   De plus $\underline{i}_L(t)=\frac{1}{j\omega L}\underline{v}(t)=-\frac{j}{\omega L}\underline{v}(t)$, en retard de phase de 90° sur $i_R(t)$, donc vecteur vertical vers le bas, de norme $I_L=\frac{V}{\omega L}=\frac{R}{\omega L}\frac{V}{R}=\frac{R}{\omega L}I_R=0{,}265\,I_R$, représenté par 2,65 cm.

   On note le déphasage (positif) $\alpha=\varphi_{iR/i}=\varphi_{v/i}$: on lit sur le diagramme $I^2=I_L^2+I_R^2=(1+0{,}265)^2I_R^2$ donc $I^2=I_L^2+I_R^2=(1+0{,}265)^2I_R^2$ et $I=1{,}035\,I_R$; et $\alpha=\text{Arctan}\frac{I_L}{I_R}=\text{Arctan}\,0{,}265=0{,}260\,\text{rad}=14{,}86\,°$.

   Voir la construction ci-dessous (vecteurs des courants en rouge)



On construit maintenant les tensions, sur un nouveau diagramme éventuellement, mais en gardant la direction des vecteurs courant : comme $u_C(t)$ est en retard de phase de 90° sur l'intensité $i(t)$, on retrouve $\alpha = \varphi_{iL/uC}$.

On choisit une échelle quelconque pour V, on a alors pour la norme de $\vec{U}_C$:

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = 1{,}035 \frac{I_R}{\omega C} = 1{,}035 \frac{V}{\omega R C} = 0{,}329\, V .$$

On construit alors $\vec{U}$, et on exprime sa norme avec le théorème d'Al-Kashi* :

$U^2 = U_C^2 + V^2 - 2\, U_C V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = U_C^2 + V^2 - 2\, U_C V \sin\alpha$, qui permet d'obtenir la relation entre U et V : $U^2 = (0{,}329\, V)^2 + V^2 - 2(0{,}329\, V) V \sin 14{,}86\,°$, donc $U = \sqrt{0{,}329^2 + 1 - 2 \times 0{,}329 \times \sin 14{,}86\,°}\, V$, donc $U = 0{,}969\, V$ d'où on tire l'amplitude V

$V = \frac{311}{0{,}969} = 321{,}0$ V et ensuite $U_C = 0{,}329\, V = 105{,}7$ V .

Trouver la phase à l'origine de $v(t)$ soit $\beta = \varphi_{v/u}$ est plus délicat : on peut voir d'après le diagramme que $\sin\beta = \frac{U_C \cos\alpha}{U}$, ce qui donne $\beta = 19{,}17\,°$.

On a ensuite $\varphi_i = \beta - \alpha$, puis $\varphi_{uC} = \beta - \alpha - 90\,°$.

* On peut utiliser aussi Pythagore $U^2 = (U_C \cos\alpha)^2 + (V - U_C \sin\alpha)^2$