TD 9 TRANSITOIRES (2)

1. Optimisation d'un circuit (R,L,C) série

On peut redonner le résultat du cours ou refaire la démarche.

La loi des mailles donne $u_C + u_L + u_r + u_R = 0$ soit $\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i = 0$.

Or $i = \frac{dq}{dt}$ donc $L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, qu'on écrit sous forme canonique $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$ avec par identification $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

On sait que le régime permanent est atteint le plus rapidement en régime critique, tel que l'équation caractéristique n'ait qu'une solution dans les complexes (discriminant nul), ce qui conduit à $Q = \frac{1}{2}$ soit $\boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - r}$ (on peut calculer le Δ de l'EC de l'ED sous forme brute, sans passer par *λ* ou *Q*).

<u>AN</u> : $R = 2\sqrt{\frac{1\,\mathrm{mH}}{100\,\mathrm{nF}}} - 5\,\Omega = 2\sqrt{\frac{1000\,\mu\mathrm{H}}{0{,}100\,\mu\mathrm{F}}} - 5\,\Omega$ soit $\underline{R = 195\,\Omega}$

2. Équation différentielle pour l'intensité dans un circuit (R,L,C) série

(a) On obtient avec la charge par exemple $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, qu'il faut dériver pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par i : c'est la même équation $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

(b) <u>À cette date</u>, l'intensité doit être continue à cause de la bobine : $\underline{i = 0}$
On en déduit que $\underline{u_R = R\,i = 0}$.

La tension u_c est également continue : $\underline{u_C = \frac{q_0}{C}}$.

La loi des mailles donne donc $u_L + u_C + u_R = 0$ donc $\underline{u_L = -\frac{q_0}{C}}$.

La loi de la bobine donne $u_L = L\frac{di}{dt}$ donc $\underline{\frac{di}{dt} = -\frac{q_0}{LC}}$.

L'équation différentielle donne $\frac{d^2i}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di}{dt} - \frac{1}{LC}i$ donc $\underline{\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{Rq_0}{L^2C}}$

(c) Les résolutions sont plus simples avec λ qu'avec Q : $Q=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\omega_0}{Q}=2\lambda=4\omega_0$.

L'EC de l'ED est donc $r^2+4\omega_0 r+\omega_0^2=0$ de discriminant $\Delta=12\omega_0^2=[2\sqrt{3}\omega_0]^2>0$: le régime est donc apériodique.

Les racines sont alors $r_{1,2}=(-2\pm\sqrt{3})\omega_0$ et la solution générale (pas de SP) est alors $i(t)=A\exp((-2-\sqrt{3})\omega_0 t)+B\exp((-2+\sqrt{3})\omega_0 t)$.

D'après la question b), on a $i(0_+)=0$ donc $A+B=0$ et $\frac{di}{dt}(0_+)=-\frac{q_0}{LC}=-\omega_0^2 q_0$: on dérive $\frac{di}{dt}=A(-2-\sqrt{3})\omega_0\exp((-2-\sqrt{3})\omega_0 t)+B(-2+\sqrt{3})\omega_0\exp((-2+\sqrt{3})\omega_0 t)$ donc

$-\omega_0^2 q_0=A(-2-\sqrt{3})\omega_0-A(-2+\sqrt{3})\omega_0$: $A=-\frac{\omega_0 q_0}{2\sqrt{3}}=-B$

3. Réponse d'un circuit bouchon à un échelon de courant

(a) L'intensité est continue dans la bobine donc $i_L(0^+)=0$.

La tension est continue dans le condensateur donc $u(0^+)=0$, et c'est la même que celle aux bornes de la résistance : la loi d'Ohm nous dit donc que $i_R(0^+)=0$.

Finalement, la loi des nœuds donne $i_C(0^+)=i_0$.

(b) D'après la loi de la bobine, sa tension aux bornes est nécessairement nulle, puisque c'est une dérivée temporelle : $u(\infty)=0$.

On en déduit d'après la loi d'Ohm $i_R(\infty)=0$.

u étant nulle quel que soit *t*, sa dérivée temporelle aussi : $i_C(\infty)=0$.

Finalement c'est $i_L(\infty)=i_0$.

(c) Nous avons la loi des nœuds et le lois des composants $\begin{cases} i_R+i_L+i_C=i_0 \\ u=Ri_R \\ u=L\frac{di_L}{dt} \\ u=\frac{q}{C} \end{cases}$. La bobine nous oblige à dériver la loi des nœuds $\begin{cases} \frac{di_R}{dt}+\frac{di_L}{dt}+\frac{di_C}{dt}=0 \\ \frac{di_R}{dt}=\frac{1}{R}\frac{du}{dt} \\ \frac{di_L}{dt}=\frac{u}{L} \\ \frac{di_C}{dt}=C\frac{d^2u}{dt} \end{cases}$ donc $\boxed{C\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{du}{dt}+\frac{1}{L}u=0}$

(d)

La forme canonique est $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2 u=0$ avec $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10000\,\text{rad/s}$ et $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{1}{RC}$

soit $Q=R\sqrt{\frac{C}{L}}=10>0{,}5$: le régime est donc pseudopériodique.

Attention : l'expression de Q est l'inverse de celle obtenue pour un circuit RLC série, qui n'est donc pas générale, et donc pas à connaître par cœur.

Voir le cours : on trouve comme racines $r=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\,\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=-\frac{\omega_0}{20}\pm j\,\omega$ avec

$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\approx\omega_0$ car $1/400\ll 1$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$u(t)=\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{20}\right)[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]$

Nous savons que $u(0^+)=0$ donc $A=0$: $u(t)=B\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{20}\right)\sin(\omega t)$.

La limite de u à l'infini ne donne aucune information : il nous faut une autre condition aux limites, la dérivée temporelle de u .

Le condensateur nous donne $\frac{du}{dt}(0^+)=\frac{i_0}{C}$.

Dérivons la solution trouvée $\frac{du}{dt}=B\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{20}\right)\left[\omega\cos(\omega t)-\frac{\omega_0}{20}\sin(\omega t)\right]$: on en déduit que $B\omega=\frac{i_0}{C}$ soit $\boxed{u(t)=\frac{i_0}{C\omega}\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{20}\right)\sin(\omega t)}$

4. Influence d'un condensateur sur un circuit (R,L)

(a) Il faut chercher le régime permanent antérieur à la fermeture de l'interrupteur : la bobine est équivalente à un fil, mais il reste les 2 résistances. Une loi des mailles rapide donne $i(0_+)=\frac{E}{R+r}$ (puisque continue en 0 : courant dans une bobine).

$\frac{di}{dt}(0_+)$ est bien sûr lié à $u_L(0_+)$: $u_L(0_+)=L\frac{di}{dt}(0_+)+R\,i(0_+)$ qui n'est pas a priori continue, mais égale à $u_C(0_+)$ (dérivation) qui elle est continue, et donc nulle en 0, puisque le condensateur était initialement déchargé.

Donc $\frac{di}{dt}(0_+)=-\frac{R}{L}i(0_+)=-\frac{R}{L}\frac{E}{R+r}$

(b) En notant *u* la tension précédente, aux bornes de la dérivation, et avec directement la loi d'Ohm : $E=ri+u$ (maille)

dipôles : $u=L\frac{di_L}{dt}+Ri_L$ et $i_C=C\frac{du}{dt}$; nœud : $i=i_L+i_C$

Il faut donc éliminer i_L en priorité car on peut pas l'extraire de la loi de la bobine :
$u=L\frac{d}{dt}(i-i_C)+R(i-i_C)$ soit $E-ri=L\frac{d}{dt}(i-i_C)+R(i-i_C)$.

Pour éliminer $i_C=C\frac{du}{dt}$, on calcule $\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}(E-ri)=-r\frac{di}{dt}$.

On remplace $E=ri+L\frac{di}{dt}+LrC\frac{d^2i}{dt^2}+Ri+RrC\frac{di}{dt}$: $LrC\frac{d^2i}{dt^2}+(L+RrC)\frac{di}{dt}+(R+r)i=E$

ou encore $\frac{d^2i}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{rC}\right)\frac{di}{dt}+\left(1+\frac{R}{r}\right)\frac{1}{LC}i=\frac{E}{rLC}$

(c) On donne $L=43\,\mathrm{mH}\,;R=9{,}1\,\Omega\,;r=50\,\Omega$ et $E=5{,}0\,\mathrm{V}$. Quelle valeur doit-on prendre pour *C* pour obtenir un régime pseudopériodique ?

Le discriminant de l'équation caractéristique doit être négatif
$(L+RrC)^2-4Lr(R+r)C<0$ qui est une équation de degré 2 en C.

On a avec des valeurs numériques en uSI : $(0{,}043+455C)^2-508{,}26C<0$ soit
$207025C^2-469{,}13C+0{,}001849<0$ polynôme qui sera négatif entre les racines (coefficient positif devant le carré).

$\Delta=218551{,}8$ donc $C_1=3{,}95\cdot10^{-6}\,\mathrm{F}$ et $C_2=2{,}23\cdot10^{-3}\,\mathrm{F}$: $3{,}95\,\mu\mathrm{F}<C<2{,}23\,\mathrm{mF}$

(d) $C=10\,\mu\mathrm{F}$: on est bien en régime pseudopériodique.

On trouve la solution générale (cf cours) $i(t)=\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)]+\frac{E}{R+r}$,
la SP étant trouvée en rayant toutes les dérivées temporelles.

Or $i(0_+)=\frac{E}{R+r}$: $A=0$ et donc $i(t)=B\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\omega t)+\frac{E}{R+r}$

On dérive pour injecter la dérivée première :
$\frac{di}{dt}(t)=B\left[-\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\omega t)+\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\omega\cos(\omega t)\right]$ soit $B=-\frac{R}{L\omega}\frac{E}{R+r}$