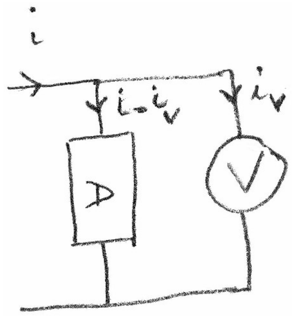
PCSI2 2023/24 – Correction DS n°2

I – Défauts des instruments de mesure

A / Voltmètre

1. La tension aux bornes de K est nulle car K=fil idéal : on a évidemment (argumentation : maille, ou différence de potentiel, ou V et E en dérivation) $U=U_0=E$.



2. Il est branché en dérivation avec le dipôle D dont on cherche la tension. Pour ne pas perturber la mesure, un courant négligeable doit entrer dans le voltmètre : $i_v=0$ pour que $i-i_v=i$, courant qui entrerait dans D en l'absence du voltmètre.

En assimilant D à une résistance R (ou une impédance pour généraliser), de conductance G=1/R, le théorème du diviseur de courant s'applique : $i_v=\frac{G_v}{G+G_v}i$ qui ne peut être nul que si $G_v=0$ donc que si R_v est infinie.

3. Il n'y a aucune différence : la résistance du voltmètre étant infinie, il est équivalent à un interrupteur ouvert, et aucun courant ne circule. La tension aux bornes de R est donc nulle, et on retrouve $U=U_0=E$.

(On peut éventuellement obtenir $i=\frac{E}{R+R_v}=0$ car R_v est infinie, qui anticipe la question 4).

4. Si K est fermé, le voltmètre reste en dérivation avec E par définition de la dérivation : $U=U_0=E$

Si K est ouvert, il y a maintenant deux résistances en série dans le circuit et le diviseur de tension s'applique, E étant la tension principale (aux bornes de l'ensemble) : $U=E\frac{R_V}{R+R_v}$

5. On a obtenu $U_0=E$, donc $U=\frac{U_0}{2}\Leftrightarrow\frac{R_V}{R+R_v}=\frac{1}{2}$, donc $R=R_v$

6. $\frac{R_V}{R+R_v}=\frac{9}{10}\Leftrightarrow 10\,R_V=9(R+R_v)\Leftrightarrow R=\frac{1}{9}R_v$: nettement plus faible, donc plus facile à obtenir, car pour un voltmètre de bonne qualité, R_v est très élevée (plusieurs MΩ).

B/Ampèremètre

1. La résistance de l'ampèremètre est alors nulle, pour ne pas ajouter de tension parasite dans le circuit qui modifierait son comportement.

I_0 traverse R_0 puisque K est ouvert, et R_0 est en dérivation avec E, on a donc (unicité de la tension et loi d'Ohm) : $E=R_0 I_0$ soit $I_0=\frac{E}{R_0}$.

2. a. On peut affirmer que l'ajout en série de l'association en dérivation de résistances *R* et R_A , très petites devant R_0 , ne changera pas l'intensité délivrée par la source, puis appliquer le diviseur de courant, ou bien faire le calcul directement puisque l'intensité est supposée connue :

La tension commune aux deux résistances en dérivation est $R_A\frac{I_0}{2}=R\,I_R$ avec une notation évidente, donc $I_R=\frac{R_A}{R}\frac{I_0}{2}$. La tension aux bornes de R_0 est donc (loi des nœuds et loi d'Ohm) : $R_0\left(I_R+\frac{I_0}{2}\right)=R_0\frac{I_0}{2}\left(\frac{R_A}{R}+1\right)$, et l'additivité des tensions (ou la loi des mailles) conduit à $E=R_0\frac{I_0}{2}\left(\frac{R_A}{R}+1\right)+R_A\frac{I_0}{2}$ (on ne prend bien sûr pas l'expression contenant *R* pour éviter d'avoir *R* à la fois au numérateur et au dénominateur!), c'est-à-dire $E=\frac{I_0}{2}R_0\left(\frac{R_A}{R}+1\right)$ car $R_0\left(\frac{R_A}{R}+1\right)>R_0\gg R_A$.

Mais puisque $E=R_0 I_0$, on trouve $1=\frac{1}{2}\left(\frac{R_A}{R}+1\right)$: $2=\frac{R_A}{R}+1$ donc $R=R_A$.

b. On utilise pour *R* une résistance réglable connue (boîte de décade de résistances) de valeurs faibles (quelques ohms). On note la mesure de l'intensité I_0 , interrupteur K ouvert. On règle *R* jusqu'à lire $\frac{I_0}{2}$ dans l'ampèremètre.

On note la valeur correspondante de *R*, qui vaut donc R_A .

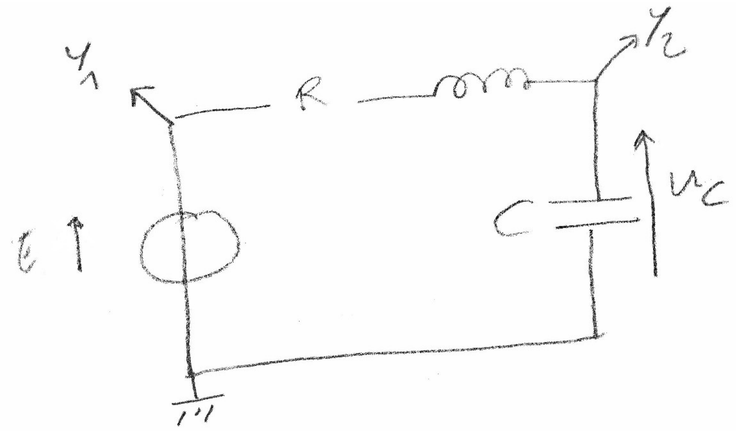
3. Sans R_0 , il y aurait contradiction si l'ampèremètre est idéal, donc équivalent à un fil : la source de tension serait court-circuitée.

Avec un ampèremètre de résistance R_A très petite, l'intensité délivrée par la source serait très importante, et risquerait de dégrader l'ampèremètre.

De plus, le choix de R_0 équivaut au choix de I_0 , donc permet de voir si la résistance interne R_A de l'ampèremètre dépend ou non de l'ordre de grandeur de l'intensité qui le traverse (du mA jusqu'à l'ampère).

III - Reverse engineering de circuits

A/ Circuit E,RLC série



1. Pour visualiser simultanément *E* reliée à la Terre, et $u_C(t)$, le condensateur doit être le dernier dipôle de la série, puisque les voies de l'oscilloscope sont elles aussi reliées à la Terre.

2. cf. cours : $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, facteur de qualité.

3. Valeur initiale : on remplace $t=0$, ce qui donne $u_C(0)=E(1-1)=0$

Valeur finale en RP : c'est la limite de la fonction, où l'exponentielle tend vers 0, donc $u_{C\infty}=E$

Pour obtenir l'intensité, on utilise la loi du condensateur : $i(t)=C\frac{du_C}{dt}$, donc on dérive l'expression précédente :

$$\frac{du_C}{dt}=-E\left\{-\frac{\omega_0}{2}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right]+\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right]\right\}$$

donc en $t=0$:

$\frac{du_C}{dt}(0)=-E\left\{-\frac{\omega_0}{2}[1+0]+\left[0+\frac{1}{2}\omega_0\right]\right\}=0$, qui est donc nulle, et l'intensité aussi après $t=0$.

L'intensité est mathématiquement continue car elle traverse une bobine : elle était donc nulle avant ce transitoire.

4. L'équation caractéristique est (en cherchant des solutions **homogènes** de la forme $\lambda\exp(st), \lambda\neq 0$) :

$s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2=0$, donc on cherche les racines : $\Delta=\frac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2$, qui doit être négatif (racines complexes) puisqu'on obtient des oscillations.

On écrit $\Delta=\frac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=\left[j\omega_0\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}\right]^2$, d'où les deux racines complexes conjuguées :

$s_{1\text{ ou }2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{\omega_0}{Q}\pm j\omega_0\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}\right]$ soit $s_{1\text{ ou }2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$.

La partie réelle (fois *t*) est l'argument de l'exponentielle, et la partie imaginaire $\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ est la pulsation intervenant dans les fonctions sinusoïdales.

D'après la partie réelle, $Q=1$ par identification, et on confirme bien cette valeur avec $\omega=\omega_0\sqrt{\frac{3}{4}}=\omega_0\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. C'est le régime pseudopériodique (oscillations amorties) obtenu quand le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta<0$.

Les autres régimes sont apériodiques : $\Delta\geq 0$, et le cas $\Delta=0$ est le régime apériodique critique.

Le lien est obtenu avec la formule d'addition pour le cos :

$A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t+\varphi\right)=A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\cos(\varphi)-A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\sin(\varphi)$, soit $\begin{cases} A\cos\varphi=1 \\ A\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Pour déterminer *A*, on utilise la relation fondamentale de la trigonométrie : $A^2=1+\frac{1}{3}$ donc $A=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (car positif : amplitude de la sinusoïde), et puisque $\sin\varphi<0$, $\varphi=-\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{A}\right)=-\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}=-30°$

6. $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc $L=\frac{1}{\omega_0^2 C}=0{,}10\,\mathrm{H}$, et $Q=1=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ donc $R=\sqrt{\frac{L}{C}}=1\,\mathrm{k\Omega}$.

7. a – La dérivée de $u_C(t)$ s'annule quand celle de $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t+\varphi\right)$ s'annule, donc quand

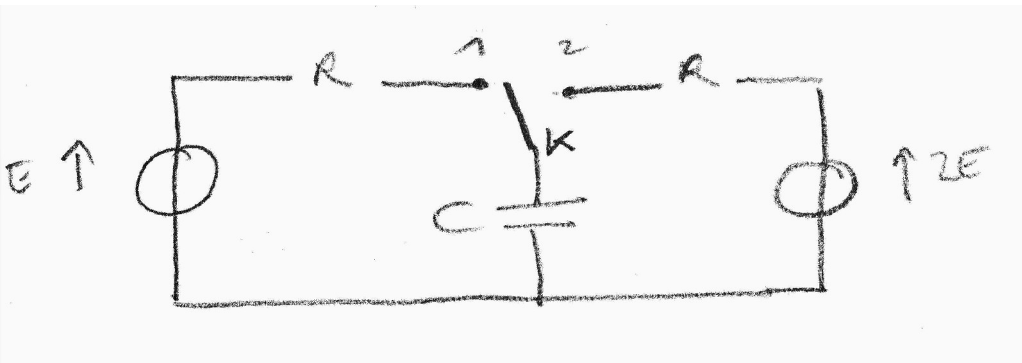
$-\frac{\omega_0}{2}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)-\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t+\varphi\right)=0$ donc quand $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=0$, soit $\tan\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$: on $\alpha=-\frac{\pi}{6}+p\pi\,,\,p\in\mathbb{Z}$ (1ère date nulle, pour $p=0$, ce qu'on peut vérifier).

On a bien $\alpha=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$, correspondant à la première date non nulle.

b – On a $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t_{\mathrm{MAX}}-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t_{\mathrm{MAX}}=\pi$ et $t_{\mathrm{MAX}}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{3}}=3{,}63\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$, puis

$k=1-A\exp\left(-\frac{\omega_0}{2}t_{\mathrm{MAX}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t_{\mathrm{MAX}}+\varphi\right)=1-\frac{2}{\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1{,}16$: c'est peu différent de E, les oscillations sont petites (c'est la plus grande qu'on observe !).

B/ Circuit E,RC série



1 et 2. Avec K sur la position 1, en régime permanent, la charge se termine, avec une intensité nulle (puisque $i(t)=C\frac{du_C}{dt}=0$) donc $u_C(t)$ atteint *E*, valeur initiale pour le transitoire suivant.

En basculant K sur la position 2, $u_C(t)$ est bien sûr continue, et C est soumise à la tension $2E$, qui sera atteinte à la fin du nouveau RP (intensité nulle pour la même raison).

3. D'après le graphique $\tau = RC = 10\,\text{ms}$, date à laquelle la tangente initiale coupe l'asymptote horizontale.

En prenant $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$, on trouve $R = \frac{\tau}{C} = 10^5\,\Omega = 100\,\text{k}\Omega$ (ou bien $C = 1\,\mu\text{F}$, $R = 10\,\text{k}\Omega$ ou $C = 10\,\mu\text{F}$, $R = 1\,\text{k}\Omega$)

4. La SP est égale à $2E$: $u_C(t) = A\exp(-t/\tau) + 2E$, avec $u_C(0) = E$, donc $E = A + 2E$: $A = -E$ et finalement $u_C(t) = E[2 - \exp(-t/\tau)]$

IV – Diagramme de Fresnel

1. $\vec{E}$ est le vecteur d'affixe $E\exp(j0) = E$ (la phase à l'origine est l'argument de l'amplitude complexe, et aussi l'angle du vecteur de Fresnel avec la demi-droite des réels positifs).

   On lit $E = 10\,\text{V}$, $U_L = 7\,\text{V}$. Donc $u_L(t) = U_L\cos(\omega t + \varphi)$, avec $U_L = 7\,\text{V}$ et $\varphi = 30°$

   Calculer la pulsation ω. $\omega = 2\pi f = 100\pi\,\text{rad/s} = 314\,\text{rad/s}$

2. Le vecteur $\vec{U}_R$ est simplement le vecteur $\vec{BA}$ sur le graphique, puisque la loi des mailles est $e(t) = u_L(t) + u_R(t)$.

3. Voir cours : on attend également la démonstration du résultat pour la dérivation temporelle.

   L'apparition du jω doit faire penser à une rotation de +90° du vecteur $\vec{U}_R$ vers le vecteur $\vec{U}_L$ (quadrature avance de la tension sur l'intensité, donc sur la tension aux bornes d'une résistance parcourue par le même courant).

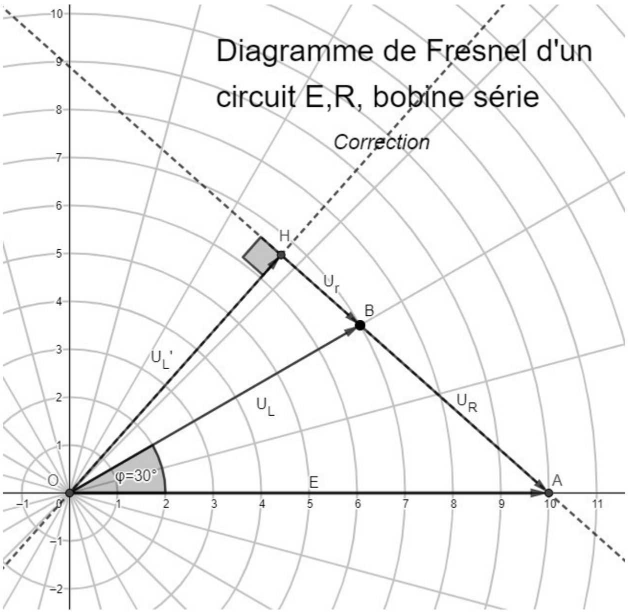
4. L'angle en B n'est pas un angle droit : ce n'est pas une bobine idéale, il ne peut donc s'agir que d'une bobine réelle.

   Son vecteur de Fresnel va se décomposer en somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{U}_R$: $\vec{U}_r$, lié à la résistance interne de la bobine, et d'un vecteur $\vec{U}'_L$, qui sera perpendiculaire aux deux autres.

   Donc :

   - on prolonge la droite (BA)

   - on trace sa perpendiculaire passant par O, on en déduit le point H, et donc les deux vecteurs de Fresnel de la bobine réelle.

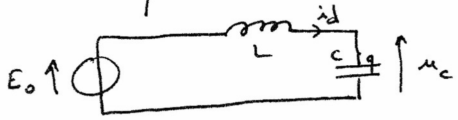
   On mesure $U'_L = 6{,}6\,\text{V}$, $U_R = 5{,}3\,\text{V}$ et $U_r = 2{,}2\,\text{V}$, donc avec les lois d'Ohm : $I = \frac{U_R}{R} = 0{,}11\,\text{A}$

   $r = \frac{U_r}{I} = 21\,\Omega$, et en module $U'_L = L\omega I$ donc $L = \frac{U'_L}{\omega I} = 0{,}20\,\text{H}$.

Doubleur de Schenkel

1.) à $t=0_+$, de toute évidence, la diode est passante :

tant que $i_d \geq 0$, $u_d = 0$ (la diode est un fil tant que $i_d \geq 0$



$$L\frac{di_d}{dt} + u_c = E_0$$

$$\text{or } i_d = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c$$

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E_0}{LC}} \qquad u_c(t) = u_{c\,hom}(t) + u_{c\,part}$$

EH associée : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = 0$ $\qquad u_{c\,hom}(t) = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$

posons $\boxed{\Omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$ $\qquad u_{c\,hom}(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$

Par ailleurs, le 2^{nd} membre de l'ED est constant, donc la soluto particulière est constante : $\frac{d^2u_{part}}{dt^2} = 0$ de façon évidente : $u_{c\,part} = E_0$

il vient :

$$u_c(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t + E_0$$

continuité de la tens° aux bornes du condo : $u_c(t=0_+) = u_c(t=0_-)$

or condo initialement déchargé : $u_c(t=0_-) = 0$

Par ailleurs : $u_c(t=0_+) = A + E_0$

il vient $A = -E_0$

continuité de l'intensité dans la bobine : $i_d(t=0_+) = i_d(t=0_-)$

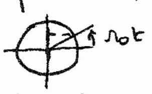
or, pour $t<0$, circuit ouvert : $i_d(t=0_-) = 0$

$$i_d = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt} = -C\Omega_0 A\sin\Omega_0 t + C\Omega_0 B\cos\Omega_0 t \qquad i_d(t=0_+) = C\Omega_0 B$$

Finalement : $\boxed{u_c(t) = E_0(1-\cos\Omega_0 t)}$ tant que la diode est passa

$$\boxed{i_d(t) = C\Omega_0 E_0 \sin\Omega_0 t}$$

2.) les expressions ci-dessus ne sont valables que tant que la diode e passante, càd tant que $i_d > 0$, càd tant que $\sin\Omega_0 t \geq 0$ (en partan



La diode reste passante tant que $0 < \Omega_0 t < \pi$

La diode n'est plus passante à partir de $\boxed{t_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{T_0}{2}}$ (où $T_0 = $ la période

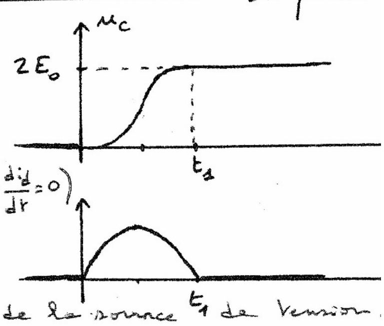
$$\boxed{u_c(t_1) = E_0(1-\cos\overbrace{\Omega_0 t_1}^{\pi}) = 2E_0}$$

3.) à $t = t_1^+$, la diode devient bloquante :

$$u_d = E_0 - \underbrace{u_c}_{\to\, 2E_0 \text{ à } t=t_1^+} - \underbrace{u_L}_{\to\, 0 \text{ à } t=t_1^+} \quad \left(\text{car } i_d = 0 \text{ et } u_L = L\frac{di_d}{dt} = 0\right)$$

$$u_d = -E_0$$

la diode restera donc bloquante après t_1 !



Les grandeurs électriques seront constantes.

On obtient sur le condensateur une tension double de la source de tension.