

TD 13 – MÉCANIQUE EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

1. Dépassement d'un poids lourd

Une voiture A de longueur $d=4\text{ m}$ suit un camion de longueur $D=10\text{ m}$ à la vitesse constante $v_0=72\text{ km/h}$ sur une route droite. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors $L=35\text{ m}$. À un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante $a=3,0\text{ m/s}^2$.

On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

- Établir l'équation horaire $x_{av}(t)$ de l'avant de la voiture, et celle de l'avant du camion $X_{av}(t)$.
- Si l'on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est $L'=20\text{ m}$ devant l'avant du camion, calculer la durée Δt du dépassement et la distance L'' parcourue par le camion pendant celui-ci.

2. Choc

Deux voitures, supposées ponctuelles, se suivent sur une ligne droite à la vitesse $v=30\text{ m/s}$ à une distance $d=80\text{ m}$ l'une de l'autre.

À la date $t=0$, la première freine avec une décélération constante $a_A=2,0\text{ m/s}^2$. Celle qui la suit commence à freiner seulement $\tau=2,0\text{ s}$ plus tard, avec une décélération constante $a_B=1,0\text{ m/s}^2$.

- En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à la date nulle, établir littéralement les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$ du mouvement des deux véhicules.

On raisonnera sur différents domaines de temps.

- Déterminer la date et la position du contact.

3. Accéléromètre balistique

Il est possible d'obtenir une mesure locale de g , accélération de tous les points matériels en chute libre, grâce au dispositif suivant : dans une enceinte où le vide a été réalisé, un système de projection envoie vers le haut, sur une trajectoire rectiligne et avec une vitesse initiale très mal connue, des particules assimilables à des points matériels.

Deux capteurs situés sur le côté mesurent les dates du passage de la particule :

- pour le plus bas, au plan d'altitude conventionnellement posée à 0, aux dates t_0 et t_3 ; on posera par convention l'origine des dates $t_0=0$ et on appellera v_0 la vitesse de la particule à cette date.
- pour celui situé le plus haut, les passages au plan d'altitude H , aux dates t_1 et t_2 : la vitesse initiale est suffisante pour que ce plan soit atteint et dépassé.

On a bien sûr $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Faire un schéma.

Justifier que $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ puis obtenir la valeur de g en fonction de H , $\Delta t_{\text{inf}} = t_3 - t_0$ et $\Delta t_{\text{sup}} = t_2 - t_1$ après avoir déterminé chaque date.

4. Chute verticale 1D freinée par des frottements turbulents

Soit un mobile de masse m et de vitesse initiale verticale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ où l'on définit l'axe z vers le bas.

En plus du poids, il est soumis à une force de frottements proportionnelle au carré de la vitesse : $\vec{f} = -k v^2 \vec{u}_z$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse, en introduisant $\alpha = \frac{m}{k}$.

b) Quelle est la vitesse limite du corps v_p , en fonction de g et de α ? Obtenir la dimension de α par analyse dimensionnelle.

c) Justifier qu'on obtient alors l'équation $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\alpha}(v^2 - v_p^2) = 0$.

d) Séparer les variables temps t et vitesse v : les termes avec v à gauche du signe $=$, les termes en temps à droite.

Poser l'intégration avec les bornes correspondant à la situation et à la variable d'intégration : situation initiale en bas, finale à t quelconque en haut.

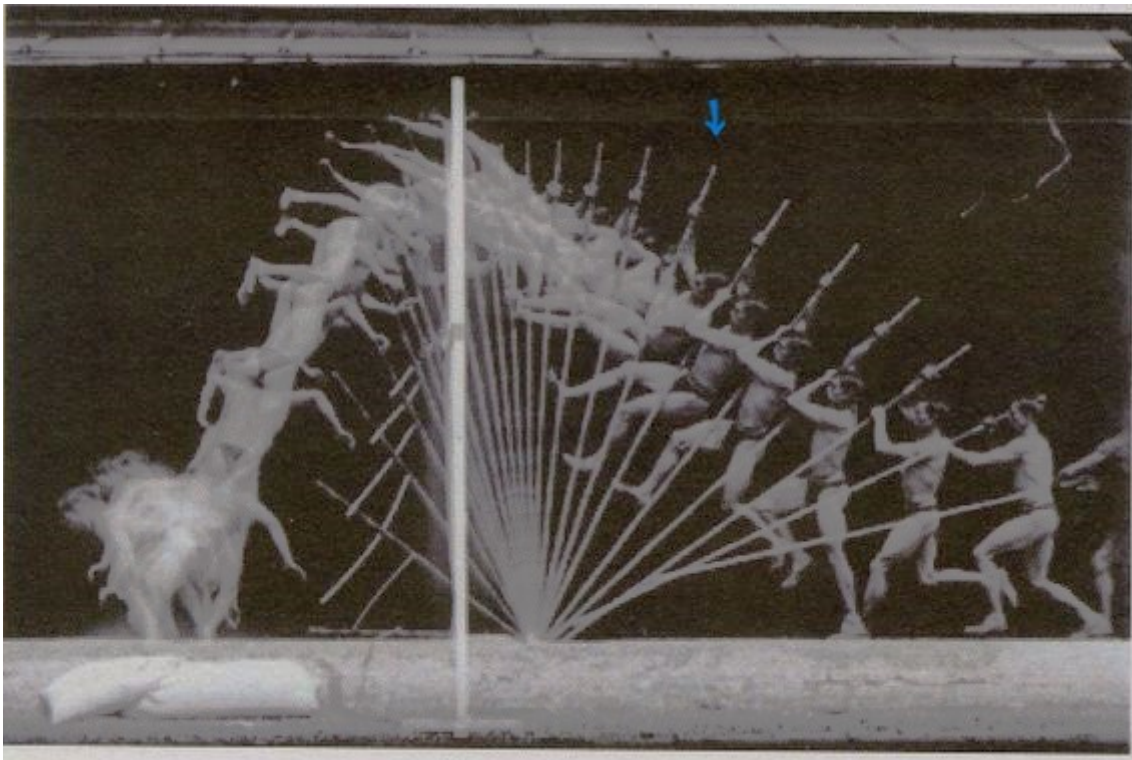
e) Décomposer $\frac{1}{v^2 - v_p^2}$ en somme de fractions facilement intégrables : exprimer b en fonction

de v_p pour avoir $\frac{1}{v^2 - v_p^2} = b \left(\frac{1}{v - v_p} - \frac{1}{v + v_p} \right)$

f) En déduire que $v(t) = v_p \frac{(v_0 + v_p) + f(t)(v_0 - v_p)}{(v_0 + v_p) - f(t)(v_0 - v_p)}$ en donnant l'expression de $f(t)$ en fonction de t , α et v_p .

g) Vérifier la cohérence : que vaut $f(0)$ donc $v(0)$? que vaut $\lim_{+\infty} f$ donc v_∞ ?

5. Chronophotographie de Georges Demeny



Construire une approximation du vecteur vitesse au point considéré, ainsi qu'au deux points situés à côté de lui – on prendra une échelle arbitraire de temps et de longueur, car seule importe les normes relatives et les orientations des vecteurs. *On pourra reporter les positions intéressantes sur un calque.*

Construire le vecteur accélération au point indiqué, à l'aide des deux vitesses autour, la symétrie améliorant la précision.

6. Skieur sur un tire-fesse

Un skieur de masse m remonte à vitesse constante une piste inclinée d'un angle α avec l'horizontale. La perche fait un angle β avec la piste. (On a bien sûr $\alpha + \beta < \pi/2$).

On modélise l'ensemble des frottements par des frottements solides de coefficient dynamique f . Déterminer la norme de la force exercée par la perche sur le skieur.

7. Peintre ingénieux

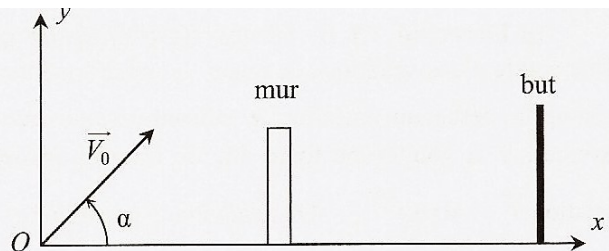
Un peintre en bâtiment, de masse $M = 90$ kg, est assis sur une chaise le long du mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite, sans masse et sans frottements, dont la propriété est de transmettre la tension de la corde d'une extrémité de la corde à l'autre, en changeant éventuellement sa direction, mais pas sa norme. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force $F = 680$ N. La masse de la chaise est $m = 15$ kg.

Tous les mouvements sont supposés verticaux.

- Déterminer l'accélération du peintre et de la chaise. Commenter son signe.
- Quelle force le peintre exerce-t-il sur la chaise ? Commenter.

8. Coup franc

On étudie, dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe $Oxyz$, un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (Oxy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430$ g, est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O . Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale \vec{V}_0 de norme $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

- Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.
- Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?
- Le tir est-il cadré ?

2. En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et \vec{v} le vecteur vitesse de M à chaque instant.

- Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{h}$.
- Donner l'équation de la trajectoire.
- Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?
- Le tir est-il cadré ?