TD 11 – Signal périodique : correction

1. Rapport cyclique

a) créneau symétrique ? $\alpha=50\,\%$

b)

c) $\langle e\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} e(t)\,dt+\frac{1}{T}\int_{\alpha T}^{T} e(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} E\,dt+\frac{1}{T}\int_{\alpha T}^{T} 0\,dt$

L'intégrale de 0 est toujours nulle, quel que soit le domaine (pas de primitive à chercher), donc $\langle e\rangle=\frac{E}{T}[t]_0^{\alpha T}=\frac{E}{T}(\alpha T-0)=\alpha E$.

Même calcul exactement pour la valeur efficace : $\langle e^2\rangle=\alpha E^2$ donc $E_{\mathrm{eff}}=\sqrt{\alpha}\,E$

d) On ne peut pas reprendre les résultats précédents directement (on n'a plus 0 comme valeur minimale maintenant).

Posons $+E_1>0$ le maximum et $-E_2<0$ le minimum de $e(t)$ - ils sont forcément de signe contraire puisque la moyenne est nulle.

Le même calcul qu'au c) donne $\langle e\rangle=\alpha E_1-(1-\alpha)E_2=0$, et pour la valeur efficace au carré $\alpha E_1^2+(1-\alpha)E_2^2=E^2$

On en tire $\alpha E_1=(1-\alpha)E_2$ donc $\alpha^2 E_1^2=(1-\alpha)^2 E_2^2$ et $\frac{1}{\alpha}(1-\alpha)^2 E_2^2+(1-\alpha)E_2^2=E^2$:

$(1-2\alpha+\alpha^2+\alpha-\alpha^2)E_2^2=\alpha E^2$: $E_2^2=\frac{\alpha}{1-\alpha}E^2$, donc $E_2=\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}E$ car $E_2>0$ $(-E_2<0)$

On tire E_1 de $\alpha^2 E_1^2=(1-\alpha)^2 E_2^2=\alpha(1-\alpha)E^2$ donc $E_1=\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}E$.

On vérifie facilement en remplaçant dans les équations que les solutions sont correctes.

2. Mesures au multimètre

On mesure une tension sinusoïdale au multimètre, et celui affiche $U_{\mathrm{AC}}=2{,}121\,\mathrm{V}$ et $U_{\mathrm{ACDC}}=3{,}279\,\mathrm{V}$.

En déduire toutes les caractéristiques de valeur (verticales) du signal sinusoïdal.

Existe-t-il une seule ou plusieurs possibilités ?

On a par définition, U_{DC} qui est l'offset, donc $U_{\mathrm{DC}}=\langle u\rangle$; U_{ACDC} est la valeur efficace, soit $U_{\mathrm{ACDC}}=\sqrt{\langle u^2\rangle}$.

U_{AC} est la valeur efficace du signal sans l'offset : $U_{\mathrm{AC}}=\sqrt{\langle (u-\langle u\rangle)^2\rangle}$, soit $U_{\mathrm{AC}}=\sqrt{\langle u^2-2u\langle u\rangle+\langle u\rangle^2\rangle}=\sqrt{\langle u^2\rangle-2\langle u\rangle\langle u\rangle+\langle u\rangle^2}$ (linéarité de la moyenne et moyenne d'une constante), donc $U_{\mathrm{AC}}=\sqrt{\langle u^2\rangle-\langle u\rangle^2}$: $U_{\mathrm{AC}}^2=U_{\mathrm{ACDC}}^2-U_{\mathrm{DC}}^2$.

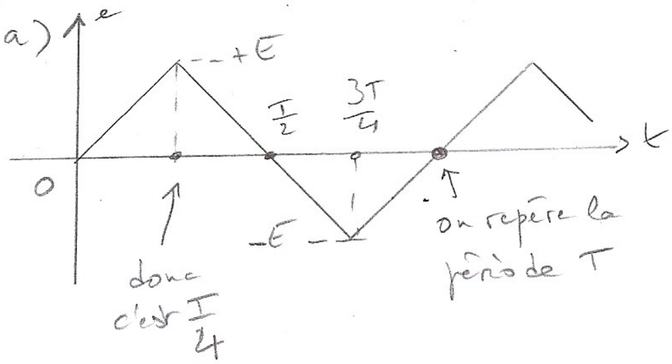
On en tire $U_{\mathrm{DC}}^2=U_{\mathrm{ACDC}}^2-U_{\mathrm{AC}}^2$, mais l'offset peut être positif ou négatif : $\langle u\rangle=\pm\sqrt{3{,}279^2-2{,}121^2}\,\mathrm{V}=\pm 2{,}500\,\mathrm{V}$.

C'est une sinusoïde, donc $U_{\mathrm{AC}}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$ et $U_m=\sqrt{2}\times 2{,}121\,\mathrm{V}=3{,}000\,\mathrm{V}$, positive par définition.

Selon le signe de l'offset, on obtient donc $(U_{\mathrm{MAX}}=5{,}500\,\mathrm{V}; U_{\mathrm{min}}=-0{,}500\,\mathrm{V})$ ou bien $(U_{\mathrm{MAX}}=0{,}500\,\mathrm{V}; U_{\mathrm{min}}=-5{,}500\,\mathrm{V})$

3. Signal triangulaire

a)

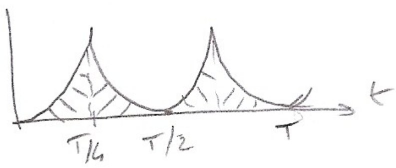


Par symétrie, les aires sont égales au-dessus et en dessous de 0 :
$\langle e \rangle = 0$

b) $e(t)$: fonction linéaire, passant par $\left(\frac{T}{4} ; +E\right)$, donc le taux d'accroissement est $\frac{E}{T/4} = \frac{4E}{T}$; finalement $e(t) = \frac{4E}{T} t$

c) $\mathcal{A} = \int_0^{T/4} \frac{16E^2}{T^2} t^2 \, dt = \frac{16E^2}{3T^2} \left[t^3 \right]_0^{T/4} = \frac{16E^2}{3T^2} \cdot \frac{T^3}{4^3} = \frac{E^2 T}{12}$

d) Allure du carré

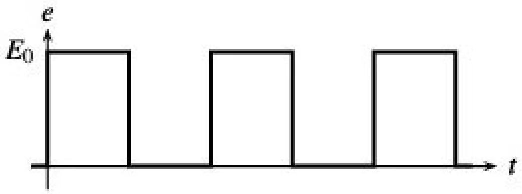


Toutes les aires sont identiques !
$\langle e^2 \rangle = \frac{4\mathcal{A}}{T} = \frac{E^2}{3}$

donc $E_{eff} = \sqrt{\langle e^2 \rangle} = \frac{E}{\sqrt{3}}$

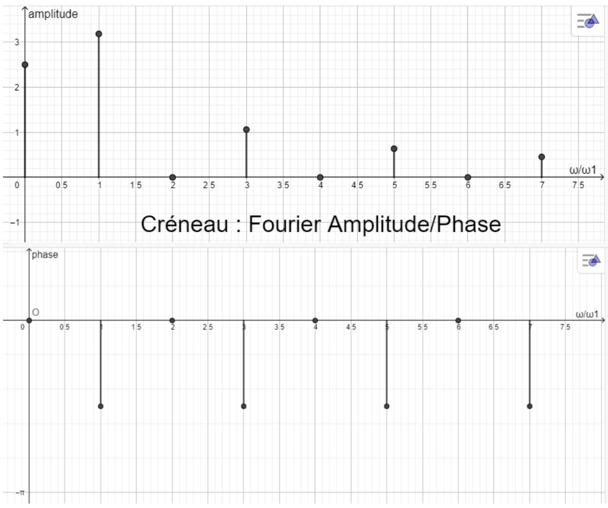
e) E_{eff} donnée $= \frac{E}{\sqrt{2}}$ $\quad$ err $= \frac{E_{eff}\text{ donnée} - E_{eff}}{E_{eff}} = \frac{1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$
$= 22,5\%$

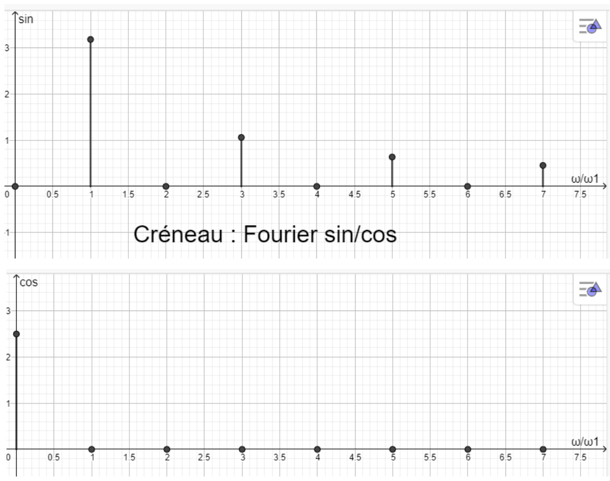
4. Décomposition de Fourier



$$e(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5...} \frac{1}{n} \sin\left(n \times 2\pi \frac{t}{T_e}\right)$$

a) $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_e}$; Les amplitudes sont donc $\frac{E_0}{2}$ pour le continu et $\frac{2E_0}{n\pi}$ pour les harmoniques.
Les phases sont nulles pour le continu, et valent toutes -90° pour les harmoniques car $\sin\alpha = \cos(\alpha - 90°)$.





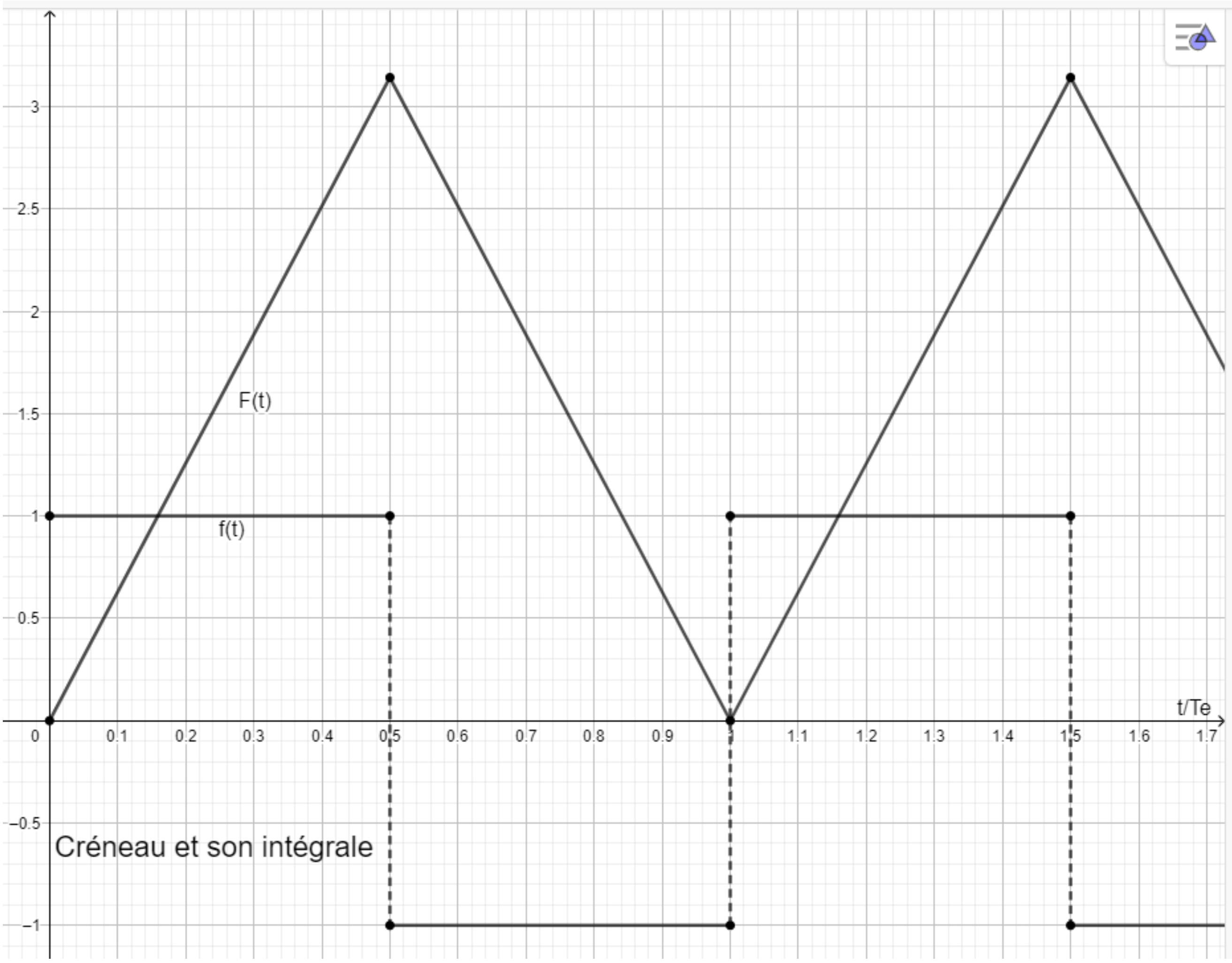
En version sin/cos : 0 pour le sin et $\frac{E_0}{2}$ pour le cos à la pulsation nulle ; $\frac{2E_0}{n\pi}$ pour le poids du sin, et 0 pour le poids du cos, pour les harmoniques.

b) On enlève donc l'offset au créneau précédent : sa décomposition devient
$f(t) = \frac{2E_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5...} \frac{1}{n} \sin(n\omega_1 t)$, et le créneau varie entre $+\frac{E_0}{2}$ et $-\frac{E_0}{2}$.

Par identification $E = \frac{E_0}{2}$ donc $E_0 = 2E$, et la décomposition est donc
$f(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1,3,5...} \frac{1}{n} \sin(n\omega_1 t)$.

c) L'intégrale est une tension fois un temps (V.s). Multiplier par ω_1, en rad/s permet de retrouver effectivement des volts V.

d) Entre 0 et $\frac{T_e}{2}$, la pente de F est donc $\omega_1 E$, et l'équation de F est $F(t)=\omega_1 E t$, qui passe donc par O et le point $\left(\frac{T_e}{2};\omega_1 E\frac{T_e}{2}=\pi E\right)$:



Ensuite la pente est opposée, pendant la même durée $\frac{T_e}{2}$: on revient en 0.

e) $F(t)=\omega_1\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}\frac{1}{n}\int_0^t \sin(n\omega_1 t')dt'$, dont chaque primitive est -cos, avec $n\omega_1$ comme constante pour corriger la primitive :

$F(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}\frac{1}{n^2}[-\cos(n\omega_1 t')]_0^t$ soit $F(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1,3,5...}\frac{4E}{\pi n^2}\cos(n\omega_1 t)$

Bonus maths : On retrouve l'offset $\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5...}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi E}{2}$ par symétrie, donc la somme des inverses des carrés impairs $\sum_{n=1,3,5...}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

f) Pour f : $\frac{4E}{n\pi}<\frac{E}{1000}$ donc $n>\frac{4000}{\pi}=1273$

Pour F : $\frac{4E}{n^2\pi}<\frac{\pi E}{1000}$ donc $n>\frac{\sqrt{4000}}{\pi}=20$: les harmoniques du triangle décroissent bien plus vite que ceux du créneau.