PCSI2 – DM 10 POUR SAMEDI 03/02

CINÉMATIQUE EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

I – Dérivée de la base, vecteur vitesse

1. Grâce au schéma des coordonnées sphériques et de la base sphérique, obtenir la décomposition de chacun des vecteurs de la base sur les vecteurs de base cartésiens :
   - Pour déterminer les coordonnées de $\vec{u}_\varphi$, faire un schéma vu de dessus (axe des pôles entrant dans l'œil).
   - Pour déterminer celles des 2 autres vecteurs, faire un schéma où le plan utilisé est celui du méridien passant par M, introduire un vecteur horizontal $\vec{u}_m$ (dans le plan équatorial) et décomposer les vecteurs cherchés.
     Décomposer le vecteur $\vec{u}_m$ sur les vecteurs cartésiens, puis remplacer.
2. Calculer les dérivées temporelles des vecteurs de la base sphérique : elles sont alors obtenues dans la base cartésienne.
3. Les exprimer sur la base sphérique, en utilisant ce qui a été obtenu à la question 1.
4. Retrouver l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques $\vec{v}=\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$

2. Trajectoire d'un bateau à cap constant

Historiquement, les bateaux devaient se repérer au sextant et à la boussole. La trajectoire la plus simple entre deux points était la *loxodrome*, trajectoire à cap constant : l'angle entre la vitesse du bateau **et le sud** est constant et vaut α, compté positivement dans le sens trigonométrique sur la surface terrestre. On s'intéresse aux trajectoires à vitesse constante v_0.

Le point de départ du bateau à la date $t=0$ est défini par $(\theta(0)=\theta_0 ; \varphi(0)=0)$. On raisonne avec une Terre entièrement recouverte d'eau (le calcul reste valable pour les avions...)

(a) Faire un schéma de la surface de l'océan avec le bateau et les points cardinaux (N,S,E,W).
En déduire l'expression de $\vec{v}$ sur la base sphérique $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ en fonction de v_0 et de α.

(b) Simplifier $\vec{v}=\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$ en introduisant R, rayon terrestre supposé constant.

(c) En déduire l'évolution de la colatitude $\theta(t)$ en fonction du temps.

(d) On donne une primitive de $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$: $F(x)=\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$
Obtenir l'évolution temporelle de la longitude $\varphi(t)$ puis démontrer que l'équation de la trajectoire est $\varphi(\theta)=\tan\alpha\cdot\ln\left|\dfrac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_0/2)}\right|$.
Le bateau part de la colatitude $\theta_0=30\,°$ (latitude 60°N) avec le cap sud-est exactement. Sa vitesse est $v_0=500\ \text{km/jour}$. Le rayon terrestre est $R=6370\ \text{km}$.

(e) Sous quelle longitude φ_1 atteint-il l'équateur ? Quelle est la durée T_{loxo} du voyage ? En déduire la longueur de la trajectoire L_{loxo} en km.

(f) La trajectoire la plus courte entre deux points A et B à la surface de la Terre, dite *orthodromique*, est le plus petit arc du grand cercle (de centre O centre de la Terre) passant par A et B.
On peut facilement démontrer qu'elle s'exprime par
$L_{\text{ortho}}=R\cdot\text{Arccos}[\sin\theta_B\sin\theta_A\cos(\varphi_B-\varphi_A)+\cos\theta_B\cos\theta_A]$.
Comparer L_{loxo} avec L_{ortho} sur le trajet entre le point de départ et le point d'arrivée obtenu au (e). Conclure.