TD 15 – Cinématique et dynamique non cartésiennes en 3D

1. Éléments cinématiques en cylindrique

On considère un point M dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque date t : $r(t)=a_0 t^2+r_0$, $\theta(t)=\omega_0 t-\theta_0$ et $z(t)=-v_0 t$ où les constantes valent $a_0=1{,}0\ \mathrm{m/s^2}$, $r_0=1{,}0\ \mathrm{m}$, $\omega_0=3{,}0\ \mathrm{rad/s}$, $\theta_0=2{,}0\ \mathrm{rad}$ et $v_0=2{,}0\ \mathrm{m/s}$.

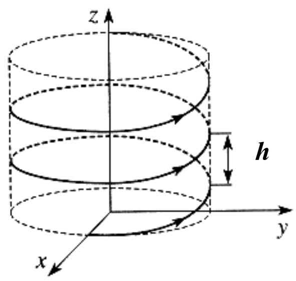
(a) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

(b) Calculer la norme de la vitesse de M à la date $t=1\ \mathrm{s}$.

(c) Calculer la norme de l'accélération à l'instant initial.

2. Château d'Amboise

Dans le château d'Amboise, une immense rampe (plan incliné lisse, dépourvu de marche) en colimaçon permettait aux cavaliers de passer du niveau de la Loire au plateau où est construit le château, sans descendre de cheval.



Le chevalier Lancelot, monté sur son fier destrier, se déplace sur ce colimaçon selon une trajectoire décrite en coordonnées cylindriques par : $r=R$, $\theta=\omega t$ et $z=at$ avec ω, R et a constants.

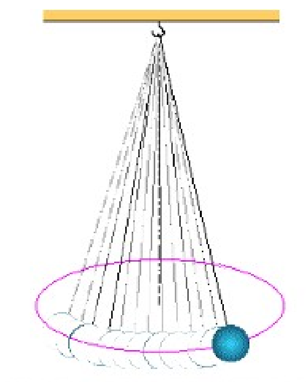
(a) Quel est le pas h de l'hélice ? (voir schéma)

(b) Déterminer les vecteurs position $\vec{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du mobile en un point quelconque. On choisira une base de coordonnées adaptées au problème.

(c) En déduire l'expression de la norme de $\vec{v}$.

(d) Cherchez un anachronisme dans l'énoncé.

3. Pendule conique



La masse m décrit un cercle dans un plan horizontal.On note α l'angle constant que fait le fil de longueur L avec la verticale. On utilisera les coordonnées cylindropolaires d'axe vertical (Oz) vers le haut, O étant l'origine située au niveau du crochet.

Par une étude dynamique, déterminer la relation entre α, l'inclinaison du pendule, et $\omega=\dot{\theta}$, vitesse angulaire de la masse. Étude, tracé.

4. Astronaute en entraînement

On s'intéresse à une centrifugeuse de 10 m de rayon.

Pendant la première phase, elle a depuis l'immobilité un mouvement circulaire uniformément accéléré qui dure 10 s.

Pendant la seconde phase, le mouvement est circulaire uniforme avec une vitesse angulaire égale à 3,0 rad/s ; cette phase dure 5,0 s.

Pendant la dernière phase qui dure 5,0 s jusqu'à l'arrêt complet, le mouvement est uniformément ralenti.

a) Combien de tours a effectué la centrifugeuse au total ?

b) À quelle date la sensation de l'astronaute est-elle la pire ? (c'est lorsque $\|\vec{a}\|$ est maximale.)

Aucun calcul exact n'est nécessaire : il suffit de s'intéresser qualitativement aux normes des deux composantes polaires de l'accélération lors de chacune des phases.

5. Ressort tournant autour de O

On considère un mouvement dans un plan horizontal, sans frottements : un ressort linéaire (k;Lo) est accroché à l'origine O des coordonnées, et à son autre extrémité est accrochée une masse m qui décrit un mouvement circulaire de vitesse angulaire ω.

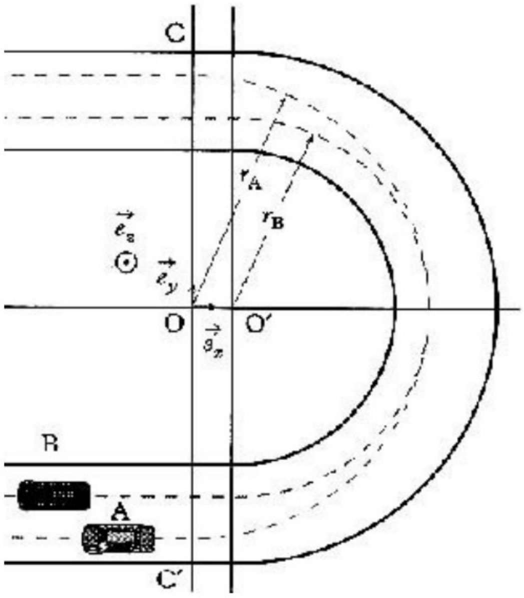
Déterminer la relation entre ω et la distance r de m au centre O du cercle.

6. Course de voitures

Lors d'une course de voitures, 2 voitures (A et B) arrivent en ligne droite et prennent le virage de manière différente :

– la voiture A prend le virage sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_A = 90\text{ m}$;

– la voiture B négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_B = 75\text{ m}$.



On appelle $\Re$ le référentiel lié au repère cartésien *(Oxyz)*. Le but de l'exercice est de comparer l'avancement des 2 voitures, sachant que la référence de comparaison est la traversée de a demi-droite *(OC)*.

(a) Déterminer puis calculer les longueurs L_A et L_B des trajectoires des 2 voitures A et B. Conclusion ?

(b) On suppose que les 2 voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Montrer que, dans les parties circulaires, l'accélération de chaque voiture s'écrit sous la forme $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$. Déterminer alors les vitesses pour que dans le virage, les accélérations des 2 voitures soient égales à $a = 0{,}8\,g$ où $g = 9{,}81\text{ m.s}^{-2}$.

(c) En déduire les durées τ_A et τ_B nécessaires aux 2 voitures pour négocier le virage. Conclure.

7. Mouvement oscillant sur un cercle

Un point M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon R. La position de M est repérée par l'angle polaire $\theta=(\vec{OM}_0, \vec{OM})$ et l'équation du mouvement est $\theta(t)=\pi\sin(\Omega t)$ où Ω est une constante.

(a) Quelle est la période T du mouvement ?

(b) Schématiser le mouvement sur le cercle. La vitesse angulaire est-elle constante ?

(c) À quelle date t_1 le mobile passe-t-il pour la première fois en N_0 tel que $\theta(N_0)=\frac{\pi}{2}$? L'exprimer en fonction de T.

(d) Calculer les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse.

(e) Calculer les composantes radiale et orthoradiale de l'accélération.

(f) À quelle date t_2 l'accélération est-elle de norme maximale ?

8. Chaussette séchant dans un sèche-linge

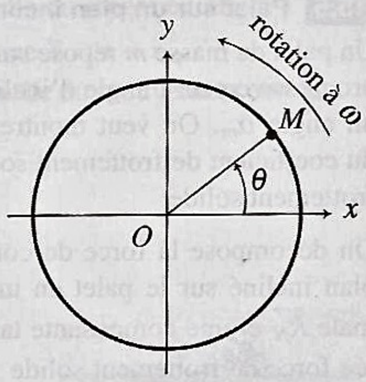
Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases :

- dans une première phase, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme ;
- dans une deuxième phase, elle retombe en chute libre.

L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce lieu.

On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25$ cm tournant à $50\ \text{tour}\cdot\text{min}^{-1}$. On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel M de masse m. On étudie la première phase pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour et en restant collé aux parois du tambour. Pour les applications numériques, on considère $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Déterminer l'accélération de la chaussette.
2. En déduire la réaction du tambour sur la chaussette.
3. Montrer que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point dont on déterminera la position angulaire.
4. Que se passe-t-il en ce point ? Quel est le mouvement ultérieur ?



9. Trajectoire d'une comète

Une comète, assimilée à un point M, se déplace dans le plan (xOy) sur une ellipse d'équation polaire : $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ où e et p sont des constantes (avec $0 < e < 1$).

À $t = 0$ il est au point P défini par $\theta = 0$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_P} = v_P \overrightarrow{e_y}$ (avec $v_P > 0$).

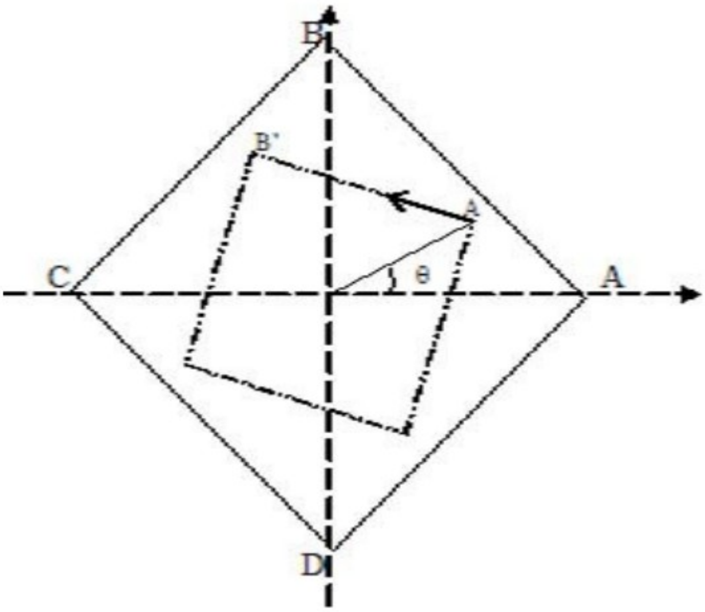
1. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de r ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ?

2. Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point P, le point A le plus éloigné de O, et également le point H d'ordonnée maximale et le point B d'ordonnée minimale. En M quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.

3. On suppose que l'accélération de M est toujours radiale. En déduire que $r^2\dot{\theta}$ est une constante (qu'on notera C). Déterminer C en fonction des données.

4. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_A}$ de M au point A.

10. Quatre mouches



Quatre mouches Adèle, Berthe, Célestine et Dorothée sont initialement aux quatre sommets A, B, C, D d'un carré de côté L.

À $t=0$, elles se mettent simultanément en mouvement : Adèle vole vers Berthe, Berthe vers Célestine, Célestine vers Dorothée et Dorothée vers Adèle avec des vitesses de même module constant v_0.

(a) Représenter en A, à une date quelconque, les vecteurs unitaires de la base polaire, et lire graphiquement les angles que fait le vecteur vitesse avec eux.

En déduire les coordonnées de la vitesse en polaires, en fonction de v_0.

On remarquera que les quatre mouches resteront continuellement aux quatre sommets d'un carré de centre O (de côté et d'orientation variable).

(b) Égaliser avec l'expression générale de la vitesse en coordonnées polaires, et en déduire l'expression de r en fonction du temps pour Adèle : $r_A(t)$. À quelle date les quatre mouches atteindront-elles le centre du carré ?

(c) Obtenir l'équation horaire $\theta(t)$, puis l'équation polaire de la trajectoire d'Adèle : $r_A(\theta)$.